



# CET164

## Física I

Prof. Rogério Monteiro

# **Cinemática vetorial III - Movimento de projéteis e movimento circular**

Aula A04

# Tópicos da aula

- Movimento dos projéteis
- Movimento circular uniforme
- Acelerações tangencial e normal
- Velocidade relativa

# Referências

- Curso de Física Básica. Volume 1: Mecânica. H. Moysés Nussenzveig. Editora Edgard Blucher. 2002.
- Fundamentos de Física. Volume 1: Mecânica. Halliday, Resnick & Walker. 8a edição. Editora LTC. 2009.
- Física para cientista e engenheiros. Volume 1: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica. Paul A. Tipler & Gene Mosca. 6a edição. Editora LTC. 2009.

# Objetivos

Ao final da aula, você deverá ser capaz de:

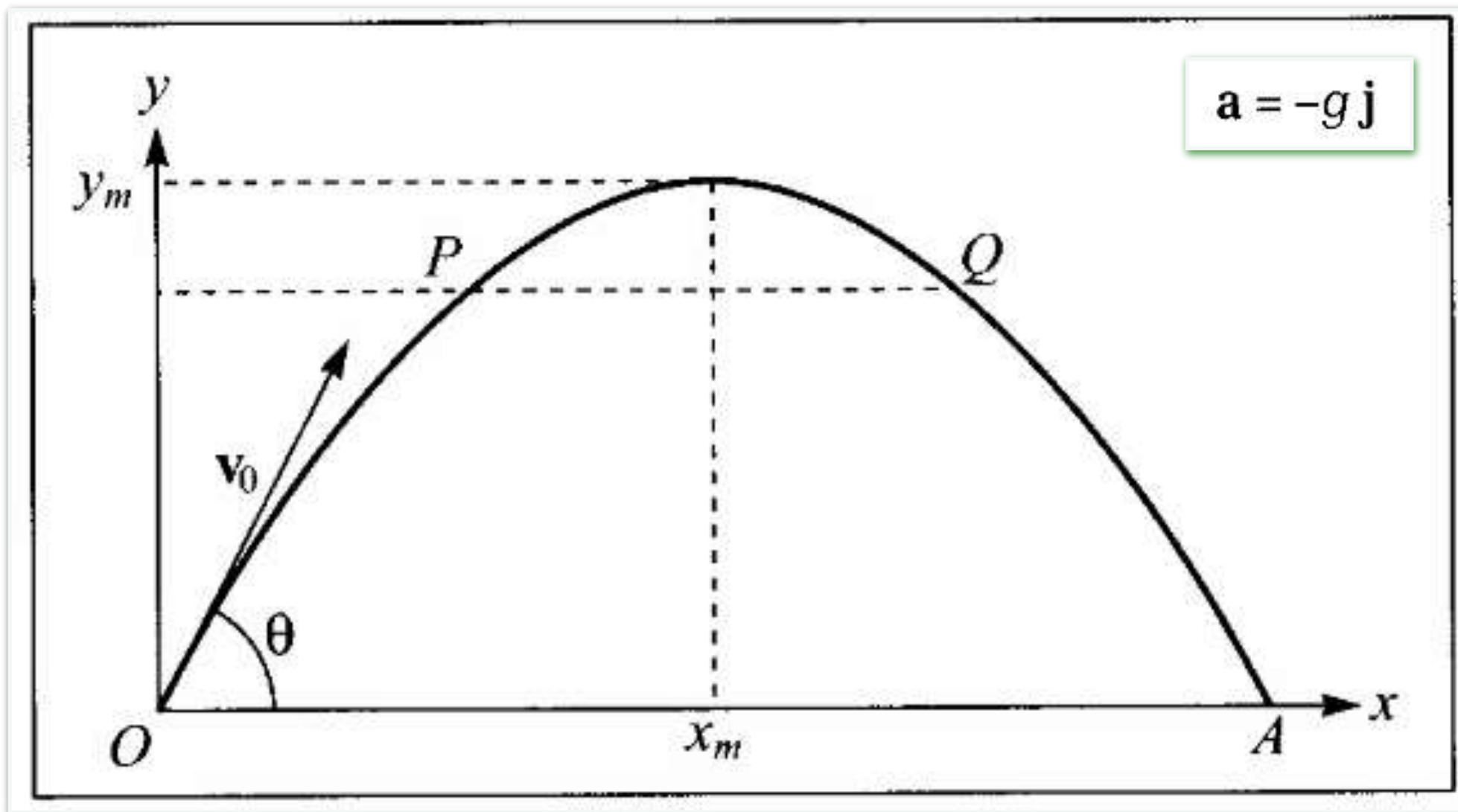
- Descrever os movimentos de projéteis em e circular uniforme termos vetoriais.
- Descrever o circular não uniforme e compreender a diferença entre as acelerações normal e tangencial.
- Entender o conceito de movimento relativo entre dois corpos.

# Movimento dos projéteis

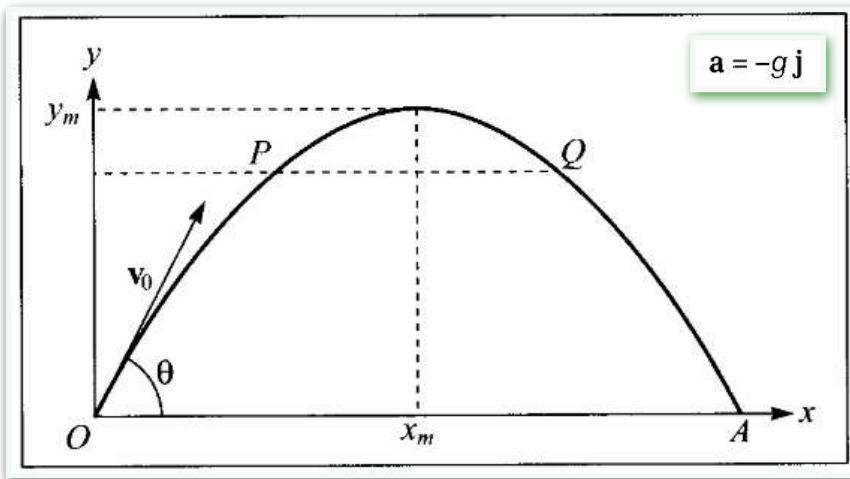
# Movimento dos projéteis

- Na balística usual, podemos considerar a **Terra como plana (localmente)** e a aceleração da gravidade como constante.
- Obviamente as condições acima **não** são satisfeitas para foguetes balísticos intercontinentais.

# Movimento dos projéteis



# Movimento dos projéteis



considerando

$$x_0 = y_0 = 0, \quad t_0 = 0$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad v_{0y} = v_0 \text{ sen } \theta$$

encontramos

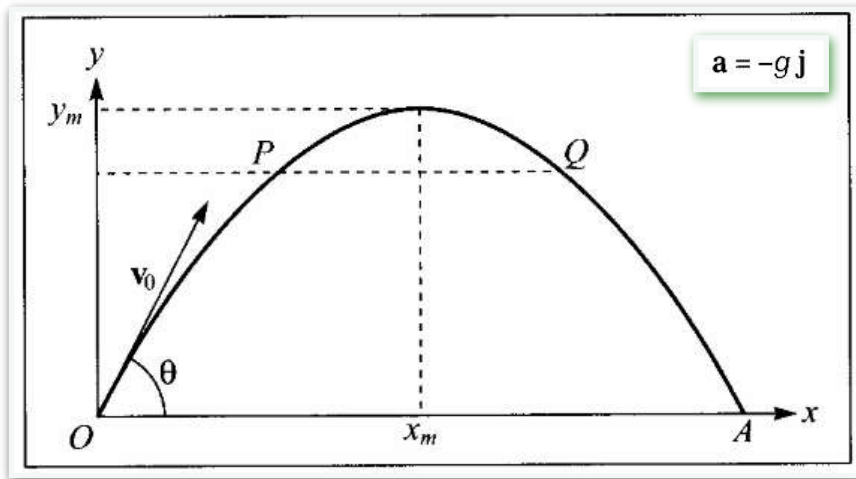
$$v_y = v_0 \text{ sen } \theta - gt \quad v_x = v_0 \cos \theta$$

$$\left. \begin{aligned} y &= v_0 \text{ sen } \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x &= v_0 \cos \theta t \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \\ x(t) &= x_0 + v_{0x}(t - t_0) \end{aligned} \right\}$$



# Movimento dos projéteis



E a equação da trajetória

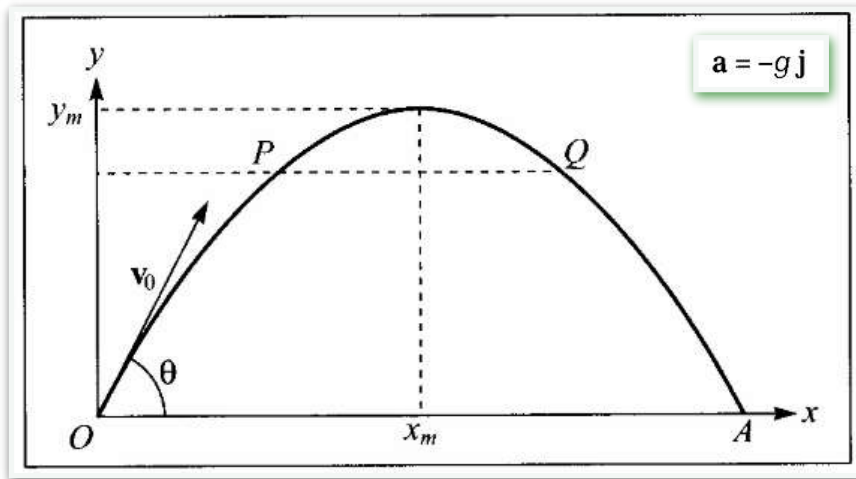
$$y = \operatorname{tg}\theta \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$$

A altura máxima atingida pelo projétil corresponde ao instante  $t_m$  em que  $v_y$  se anula:

$$t_m = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g}$$

$$y_m = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g}$$

# Movimento dos projéteis



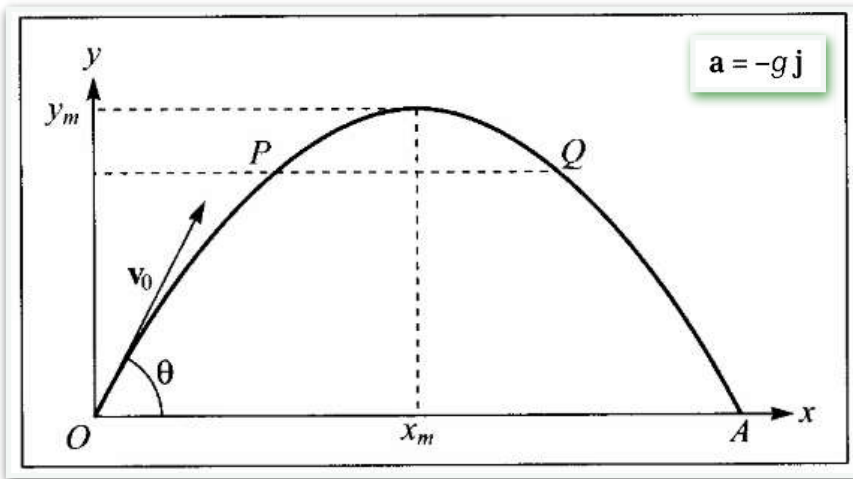
Quanto tempo leva o projétil para atingir o solo no ponto  $x = A$ ?

$$t = t_A = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} = 2t_m$$

Com que velocidade ele atinge o solo?

$$\left. \begin{array}{l} v_y(t_A) = v_0 \operatorname{sen} \theta - g t_A = -v_0 \operatorname{sen} \theta \\ v_z(t_A) = v_0 \operatorname{cos} \theta \dots \end{array} \right\} |\mathbf{v}(t_A)| = |v_0|$$

# Movimento dos projéteis



Qual é o alcance  $A$  do projétil?

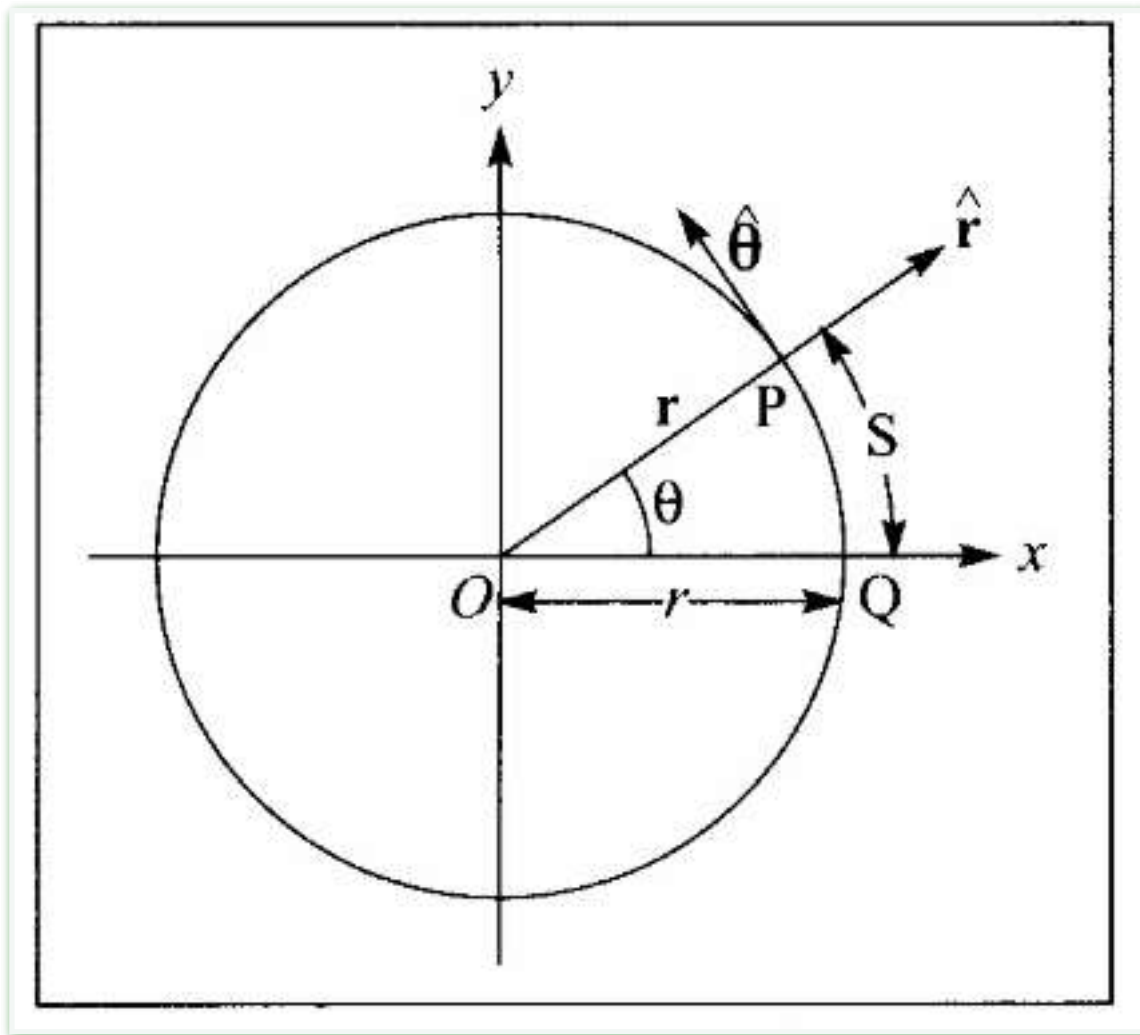
$$A = v_0 \cos \theta \cdot \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} (2\theta)$$

# Movimento circular uniforme

# Movimento circular uniforme

- Movimento plano de grande importância na Física.
- A trajetória é um círculo e o módulo da velocidade instantânea é constante.
- Alguns exemplos: movimento das extremidades dos ponteiros de um relógio; numa primeira aproximação, o movimento da Lua em torno da Terra; órbitas de partículas carregadas em aceleradores do tipo circular.

# Movimento circular uniforme

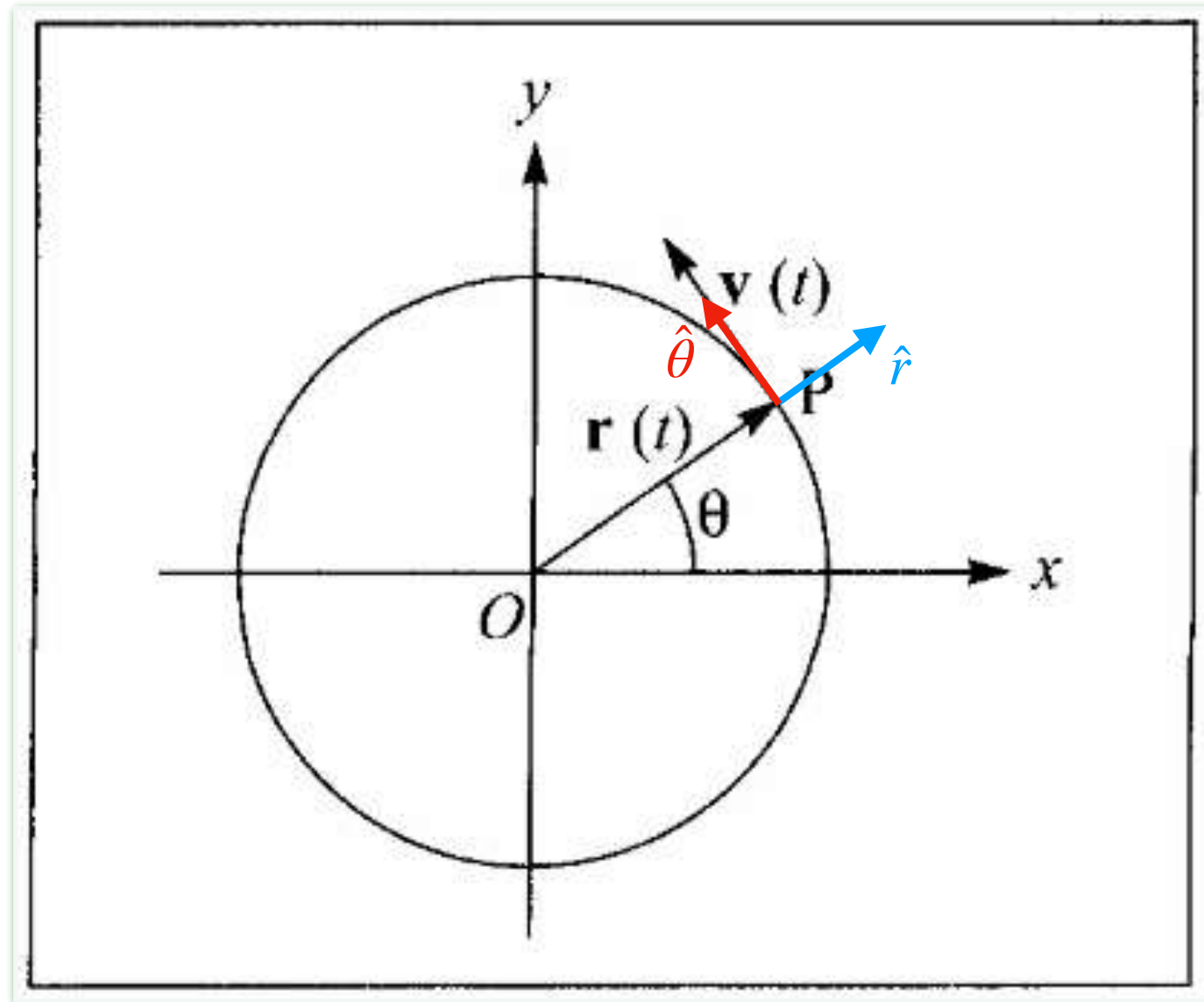
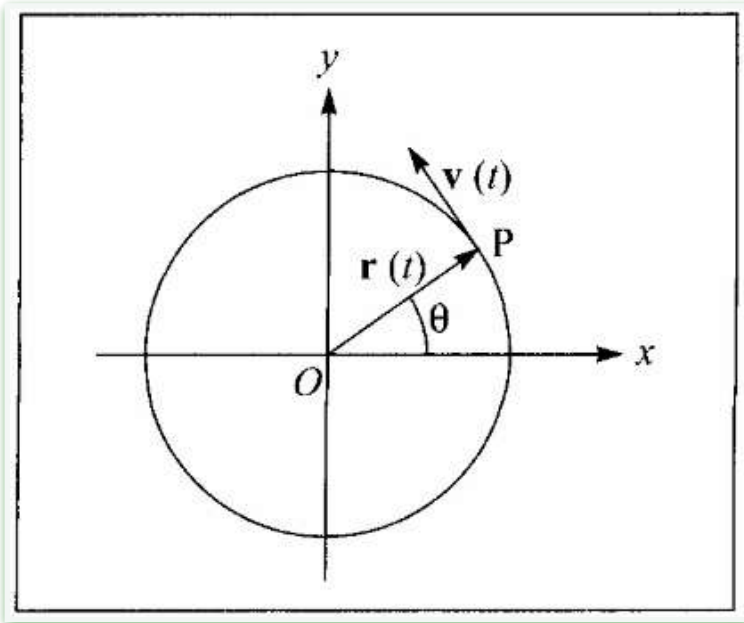


$r$  é o raio

$\theta$  é positivo no sentido anti-horário

$$s = r\theta$$

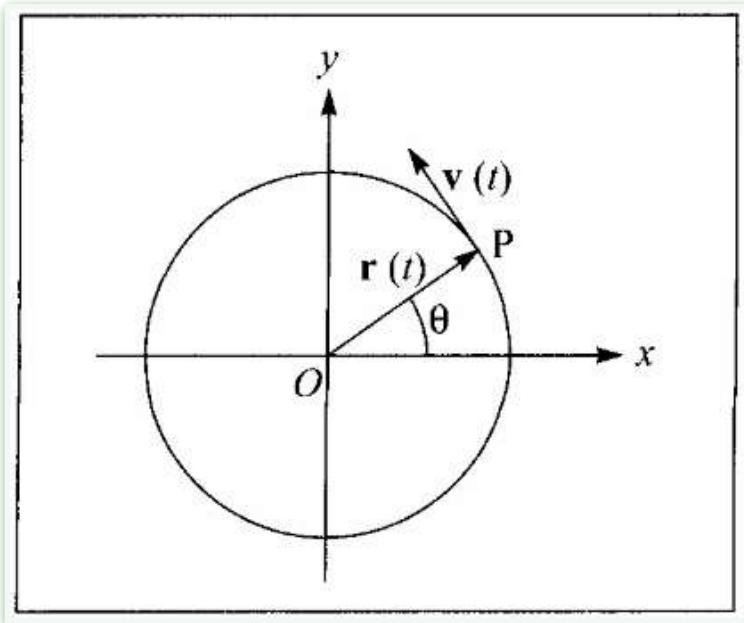
# Movimento circular uniforme



$\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  são vetores unitários (versores)

ao contrário de  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  que são fixos nas direções dos eixos,  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  variam com a posição  $P$  ocupada pela partícula ao longo do círculo

# Movimento circular uniforme



$$s = s_0 + v(t - t_0)$$

velocidade linear com que o arco  $s$  é descrito

$$\mathbf{v} = v\hat{\theta}$$

$$v = ds / dt$$

velocidade instantânea

$$T = 2\pi r / |v|$$

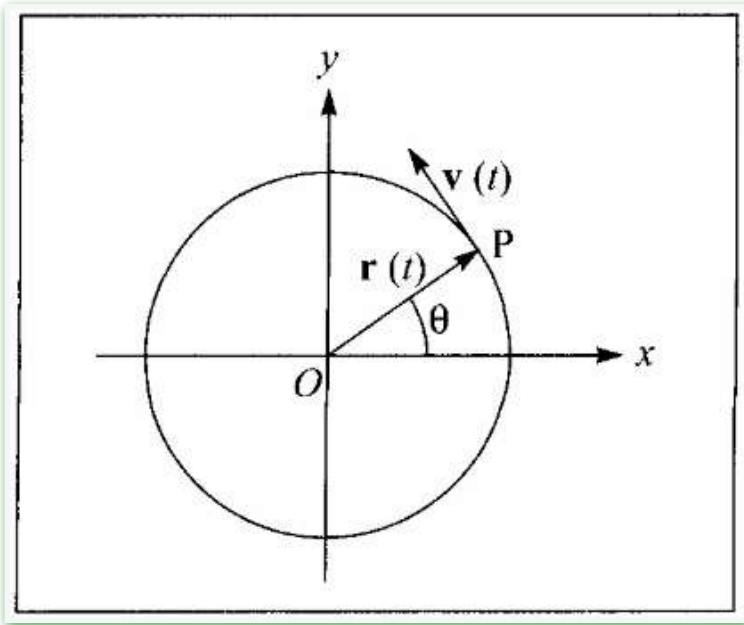
período do movimento

$$\nu = 1 / T$$

frequência do movimento



# Movimento circular uniforme



$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

$$\omega = v / r$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$|\omega| = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

velocidade angular

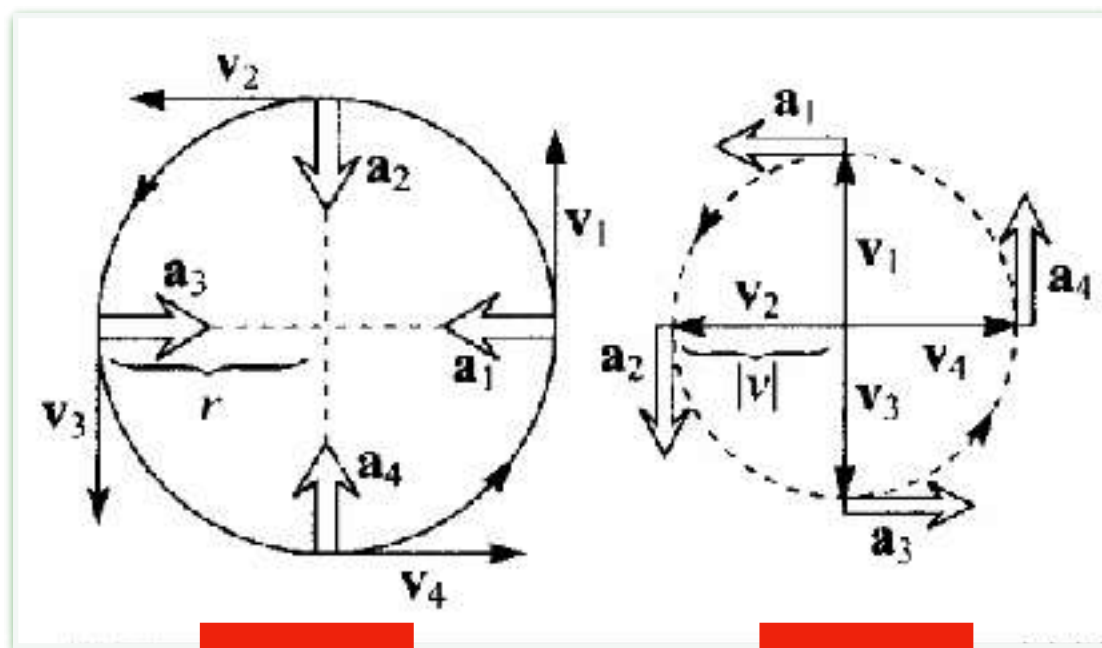
$$\mathbf{v} = \omega r \hat{\theta}$$

# Movimento circular uniforme

- Embora o movimento circular uniforme tenha uma velocidade de **módulo** constante, a direção de  $\mathbf{v}$  varia ponto-a-ponto da trajetória.
- Portanto, trata-se de um **movimento acelerado**.
- Como determinar a aceleração?

# Movimento circular uniforme

- Uma forma possível é determinar  $\mathbf{a}$  pelo processo geométrico do hodógrafo.



$$\mathbf{a} = -|\mathbf{a}|\hat{\mathbf{r}}$$

$$v = \omega r$$

$$|\mathbf{a}| = \omega v = \omega^2 r = v^2 / r$$

$$\mathbf{a} = -|\mathbf{a}|\hat{\mathbf{r}} = -\omega^2 r \hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

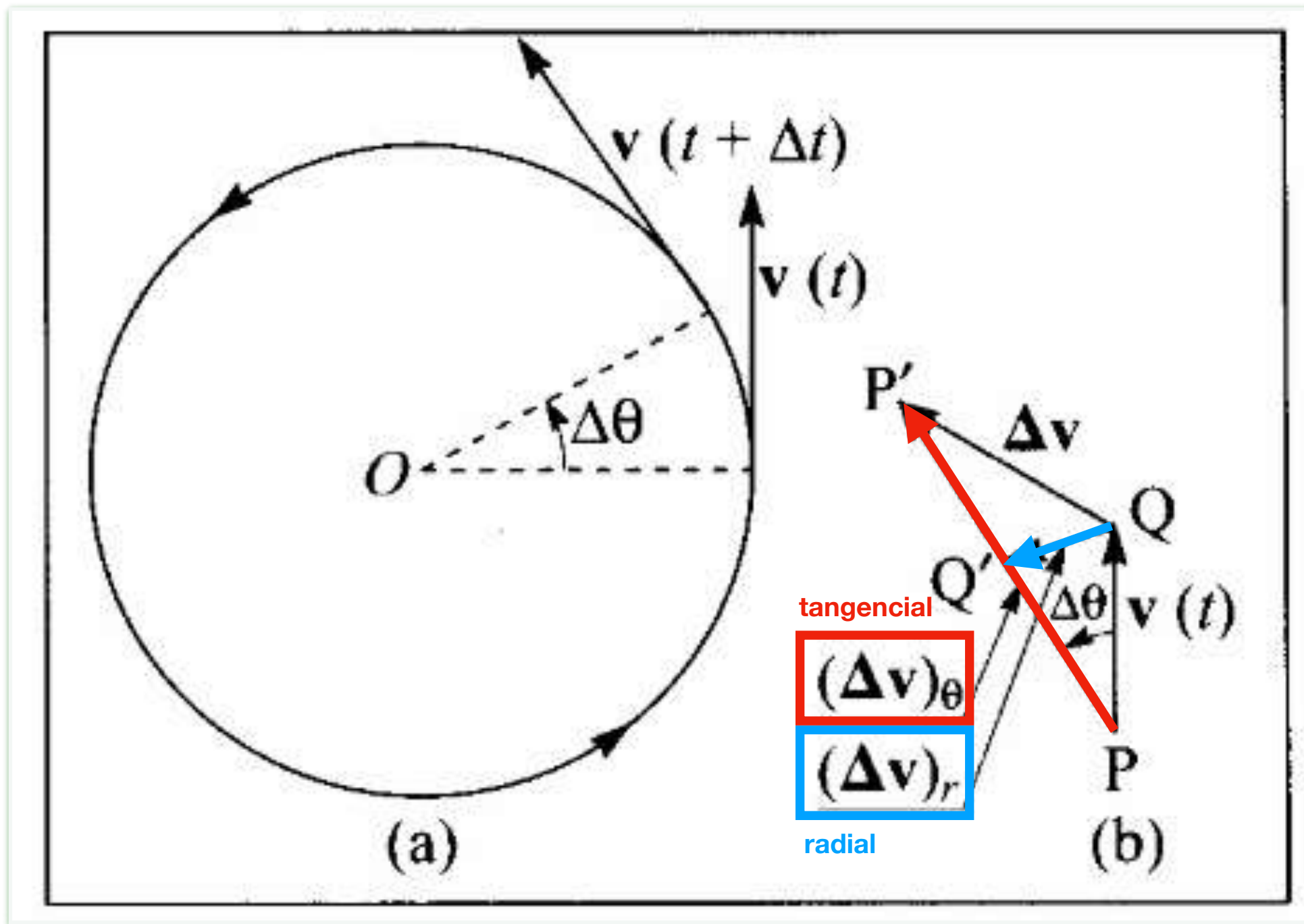
aceleração centrípeta

# Acelerações tangencial e normal

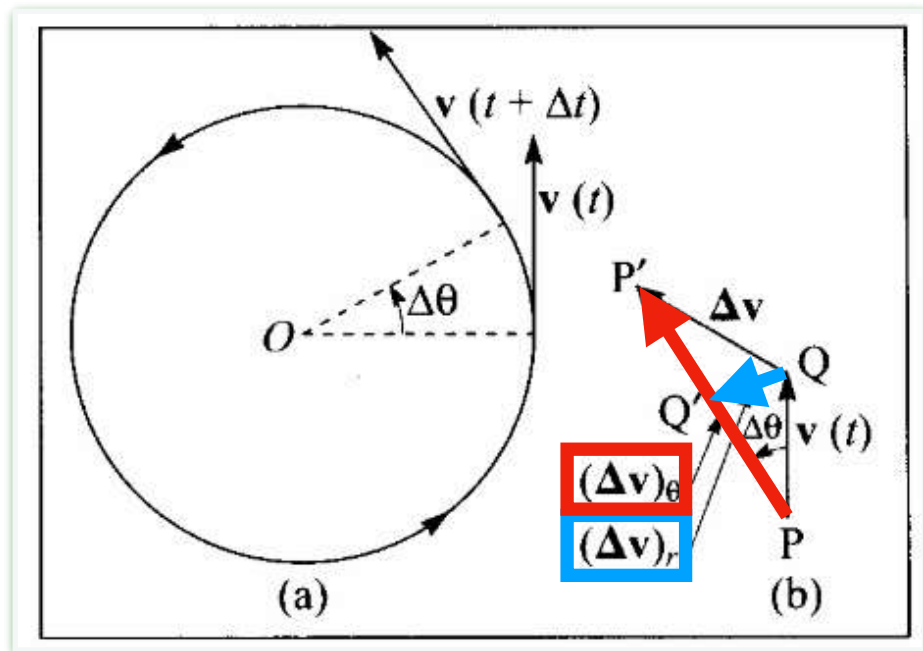
# Acelerações tangencial e normal

- Vamos agora considerar um movimento **não-uniforme** sobre um círculo.
- Neste caso, o módulo da velocidade bem como sua direção irão variar com o tempo.
- Iremos considerar separadamente os dois fatores que causam a variação  $\overrightarrow{\Delta v}$  da velocidade: a aceleração **tangencial** e a aceleração **normal**.

# Acelerações tangencial e normal



# Acelerações tangencial e normal



A componente **radial** é a já conhecida aceleração centrípeta

$$-\omega^2 r \hat{\mathbf{r}} = -r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \hat{\mathbf{r}}$$

A componente **tangencial** será

$$\frac{dv}{dt} \hat{\theta}$$

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d^2\theta}{dt^2} = r\alpha$$

↑  
aceleração angular

# Acelerações tangencial e normal

- Combinando as duas componentes, a aceleração num movimento circular qualquer é dada por

$$\mathbf{a} = a_r \hat{\mathbf{r}} + a_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$a_r = -\omega^2 r = -r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{v^2}{r}$$

aceleração centrípeta

$$a_\theta = \alpha r = r \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

aceleração tangencial



# Acelerações tangencial e normal

- Exemplo: movimento circular uniformemente acelerado.

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \text{constante}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

lei horária do movimento

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

velocidade angular instantânea

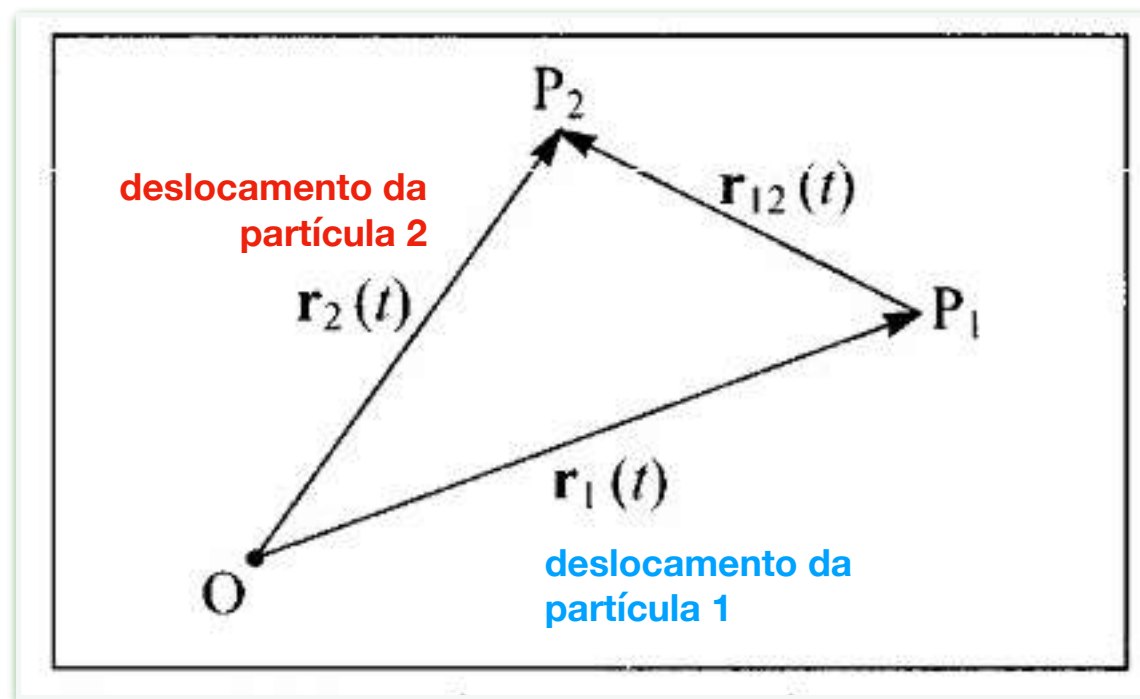
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

equação da trajetória

# Velocidade relativa

# Velocidade relativa

- Consideremos duas partículas em movimento com relação a uma origem  $O$ .
- Num dado instante elas ocupam as posições  $P_1$  e  $P_2$ .



$$\mathbf{r}_{12}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$$

deslocamento relativo da partícula 2 em relação à partícula 1

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_{12} = \mathbf{v}_{12}(t) = \mathbf{v}_2(t) - \mathbf{v}_1(t)$$

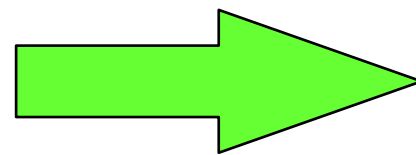
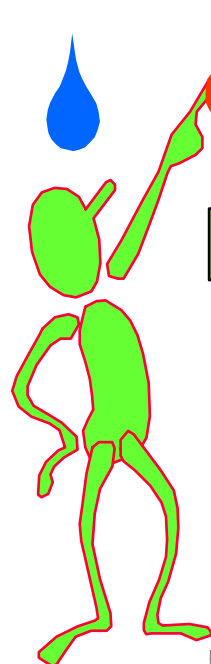
velocidade relativa da partícula 2 em relação à partícula 1

# Velocidade relativa

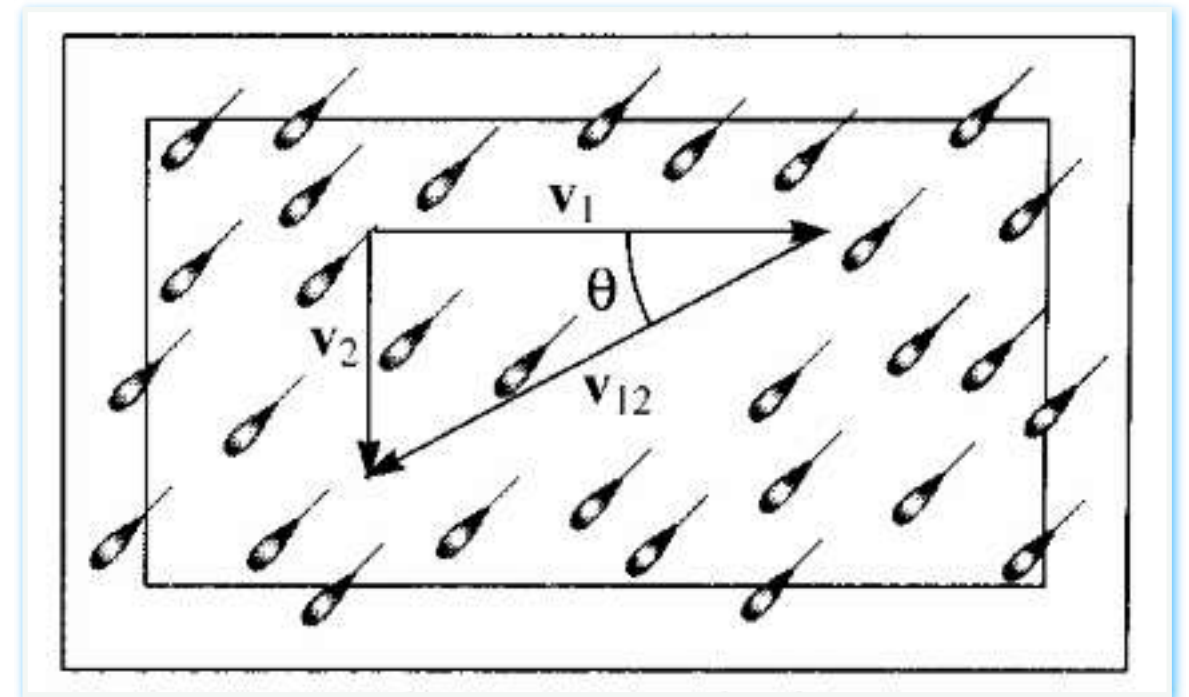
Direção real da chuva



Direção aparente da chuva



Direção do movimento do observador



chuva na janela de um carro em movimento

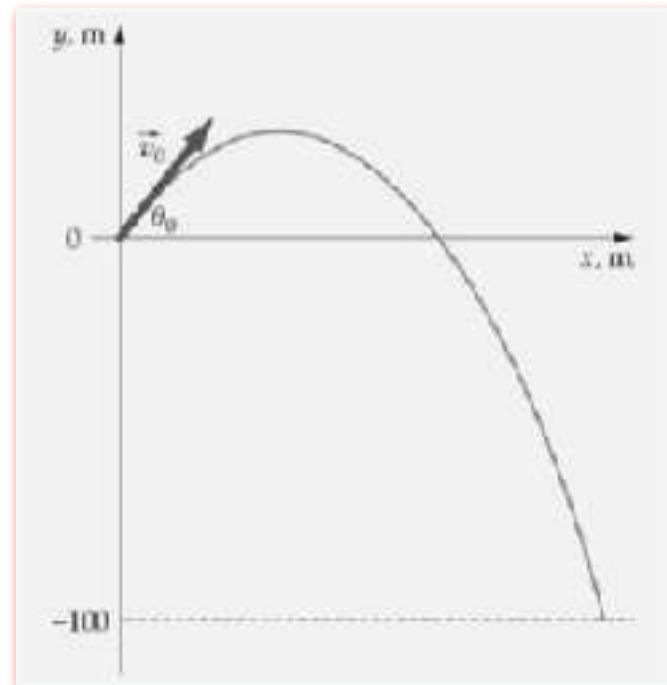
# Alguns exemplos

# Lançamento de projéteis

- Um helicóptero larga um pacote de suprimentos para vítimas de uma inundação, que estão dentro de um bote em um lago cheio. Quando o pacote é largado, o helicóptero está a 100 m diretamente acima do bote e voando com uma velocidade de 25,0 m/s a um ângulo de  $36,9^\circ$  acima da horizontal.
  - (a) Quanto tempo o pacote fica no ar?
  - (b) A que distância do bote o pacote cai?
  - (c) Se o helicóptero continua com velocidade constante, onde estará o helicóptero quando o pacote atingir o lago? (**Ignore a resistência do ar.**)

# Lançamento de projéteis

- Resolução:



- Um helicóptero larga um pacote de suprimentos para vítimas de uma inundação, que estão dentro de um bote em um lago cheio. Quando o pacote é largado, o helicóptero está a 100 m diretamente acima do bote e voando com uma velocidade de 25,0 m/s a um ângulo de 36,9° acima da horizontal.

- (a) Quanto tempo o pacote fica no ar?
- (b) A que distância do bote o pacote cai?
- (c) Se o helicóptero continua com velocidade constante, onde estará o helicóptero quando o pacote atingir o lago? (**Ignore a resistência do ar.**)

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$y = 0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

logo

$$0 = \frac{1}{2}gt^2 - v_{0y}t + y$$

e

$$t = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2gy}}{g}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = (25,0 \text{ m/s}) \sin 36,9^\circ = 15,0 \text{ m/s}$$

logo

$$t = \frac{15,0 \text{ m/s} \pm \sqrt{(15,0 \text{ m/s})^2 - 2(9,81 \text{ m/s}^2)(-100 \text{ m})}}{9,81 \text{ m/s}^2}$$

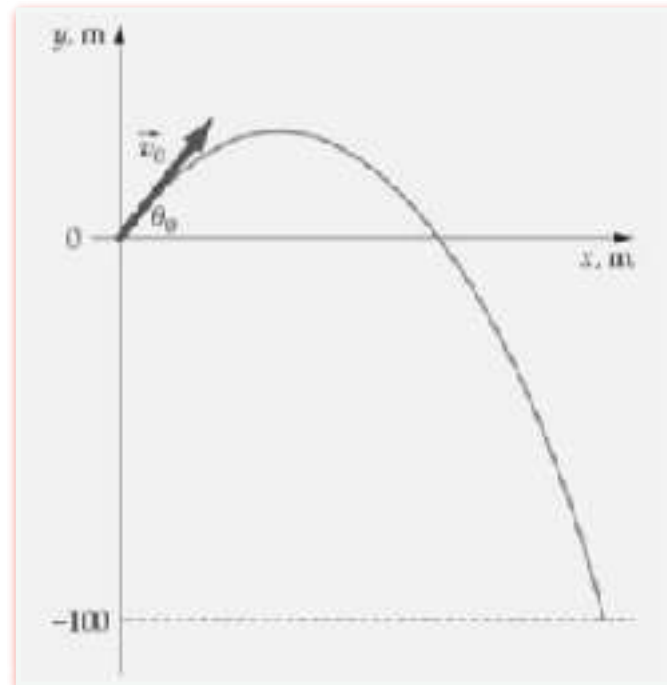
logo

$$t = -3,24 \text{ s} \quad \text{ou} \quad t = 6,30 \text{ s}$$

$$t = \boxed{6,30 \text{ s}} \quad \text{a)}$$

# Lançamento de projéteis

- Resolução:



- Um helicóptero larga um pacote de suprimentos para vítimas de uma inundação, que estão dentro de um bote em um lago cheio. Quando o pacote é largado, o helicóptero está a 100 m diretamente acima do bote e voando com uma velocidade de 25,0 m/s a um ângulo de 36,9° acima da horizontal.

- (a) Quanto tempo o pacote fica no ar?
- (b) A que distância do bote o pacote cai?
- (c) Se o helicóptero continua com velocidade constante, onde estará o helicóptero quando o pacote atingir o lago? (**Ignore a resistência do ar.**)

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 = (25,0 \text{ m/s}) \cos 36,9^\circ = 20,0 \text{ m/s}$$

$$x = v_{0x} t = (20,0 \text{ m/s})(6,30 \text{ s}) = \boxed{126 \text{ m}}$$

b)

$$x_h = v_{0x} t = (20,0 \text{ m/s})(6,30 \text{ s}) = 126 \text{ m}$$
$$y_h = y_{h0} + v_{h0} t = 0 + (15,0 \text{ m/s})(6,30 \text{ s}) = 94,4 \text{ m}$$

No impacto, o helicóptero está

$$\boxed{194 \text{ m diretamente acima do pacote}}$$

c)



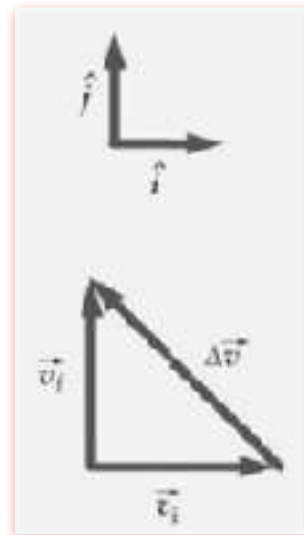
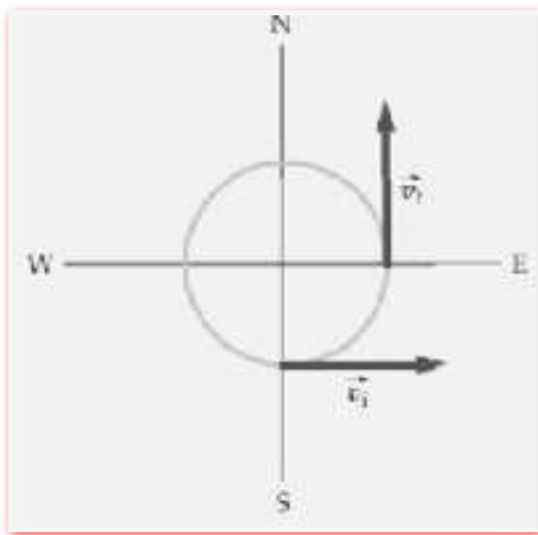
# Movimento circular não-uniforme

- Um carro viaja para o leste a 60 km/h. Ele realiza uma curva e, 5 s após, está viajando para o norte a 60 km/h. Encontre a aceleração média vetorial do carro.

# Movimento circular não-uniforme

- Resolução:

$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



- Um carro viaja para o leste a 60 km/h. Ele realiza uma curva e, 5 s após, está viajando para o norte a 60 km/h. Encontre a aceleração média vetorial do carro.

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta \vec{v}$$

$$\vec{a}_{\text{méd}} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{60 \text{ km/h } \hat{j} - 60 \text{ km/h } \hat{i}}{5,0 \text{ s}}$$

$$60 \text{ km/h} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 16,7 \text{ m/s}$$

$$\vec{a}_{\text{méd}} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{16,7 \text{ m/s } \hat{j} - 16,7 \text{ m/s } \hat{i}}{5,0 \text{ s}}$$

$$= \boxed{-3,4 \text{ m/s}^2 \hat{i} + 3,4 \text{ m/s}^2 \hat{j}}$$

# Velocidade relativa

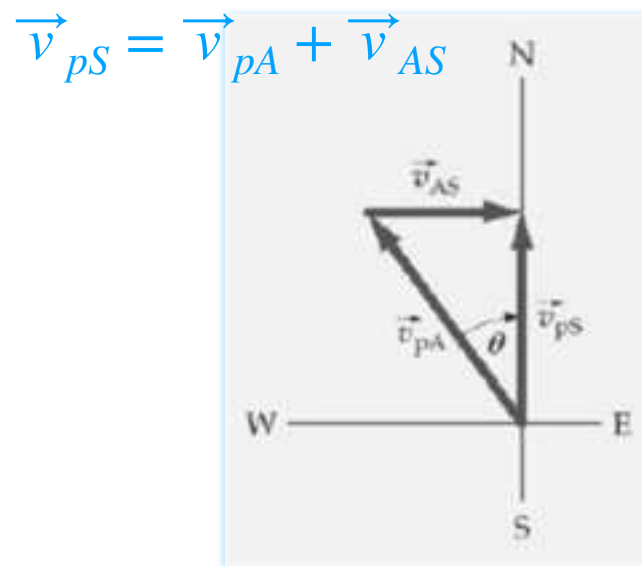
- Um piloto deseja voar orientado para o norte em relação ao solo. A velocidade do avião em relação ao ar é de 200 km/h e o vento está soprando de oeste para leste a 90 km/h.
  - (a) Qual a orientação que o avião deve adotar?
  - (b) Qual é a velocidade do avião em relação ao solo?

# Velocidade relativa

- Resolução:

- Um piloto deseja voar orientado para o norte em relação ao solo. A velocidade do avião em relação ao ar é de 200 km/h e o vento está soprando de oeste para leste a 90 km/h.
  - (a) Qual a orientação que o avião deve adotar?
  - (b) Qual é a velocidade do avião em relação ao solo?

Como o vento sopra para o leste, um avião que aponta para o norte se afastará de seu curso para o leste. Para compensar este vento lateral, o avião deve desviar para oeste, a partir da orientação do norte. A velocidade do avião em relação ao solo  $\vec{v}_{pS}$  é igual à velocidade do avião em relação ao ar,  $\vec{v}_{pA}$ , mais a velocidade do ar em relação ao solo,  $\vec{v}_{AS}$ .



$$\text{sen } \theta = \frac{v_{AS}}{v_{pA}} = \frac{90 \text{ km/h}}{200 \text{ km/h}} = \frac{9}{20}$$

logo

$$\theta = \text{sen}^{-1} \frac{9}{20} = \boxed{27^\circ \text{ para oeste do norte}}$$

a)

$$v_{pS}^2 = v_{pA}^2 + v_{AS}^2$$

$$v_{pS} = \sqrt{v_{pA}^2 - v_{AS}^2}$$
$$= \sqrt{(200 \text{ km/h})^2 - (90 \text{ km/h})^2} = \boxed{180 \text{ km/h}}$$

b)

# Sumário

- Movimento dos projéteis
- Movimento circular uniforme
- Acelerações tangencial e normal
- Velocidade relativa



