AGA0106
Astronomia de Posição

Prof. Rogério Monteiro

Trigonometria esférica

Agradecimentos: Prof. Roberto Boczko e Prof. Alan Alves Brito

Aula A07

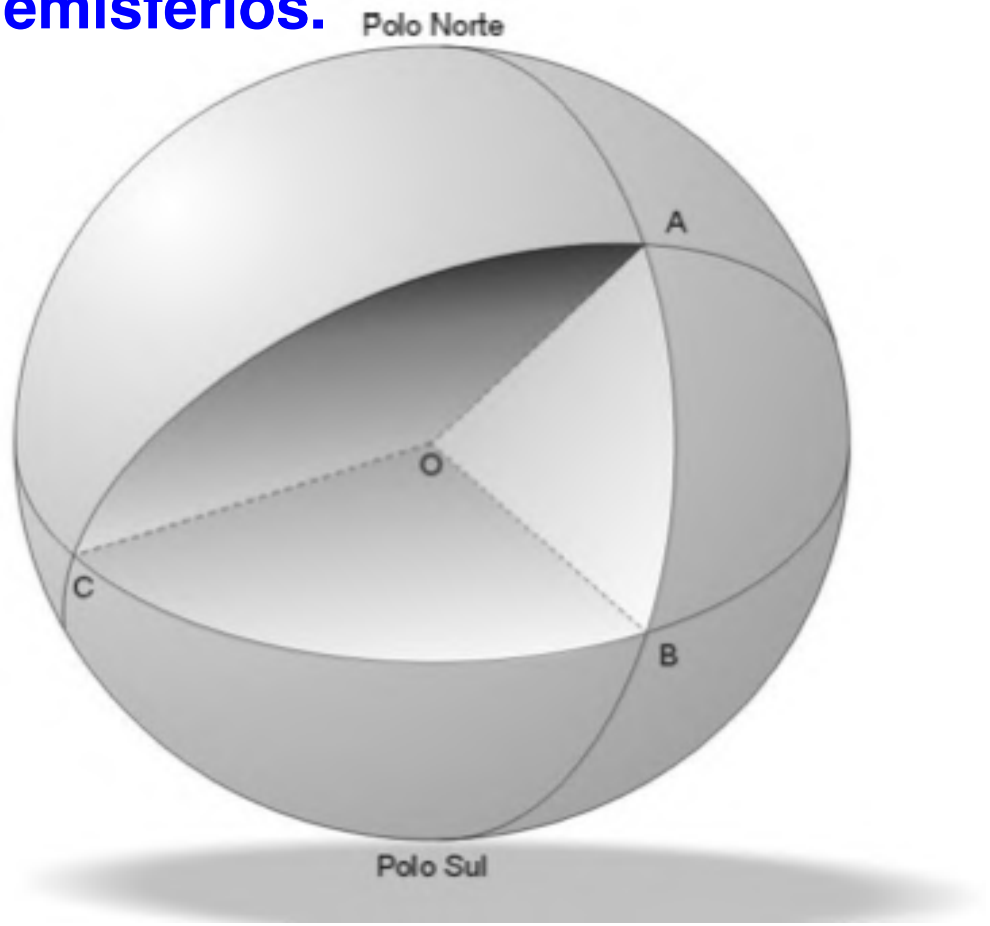
Tópicos da aula

- Introdução;
- Trigonometria plana: revisão;
- Trigonometria esférica

Introdução

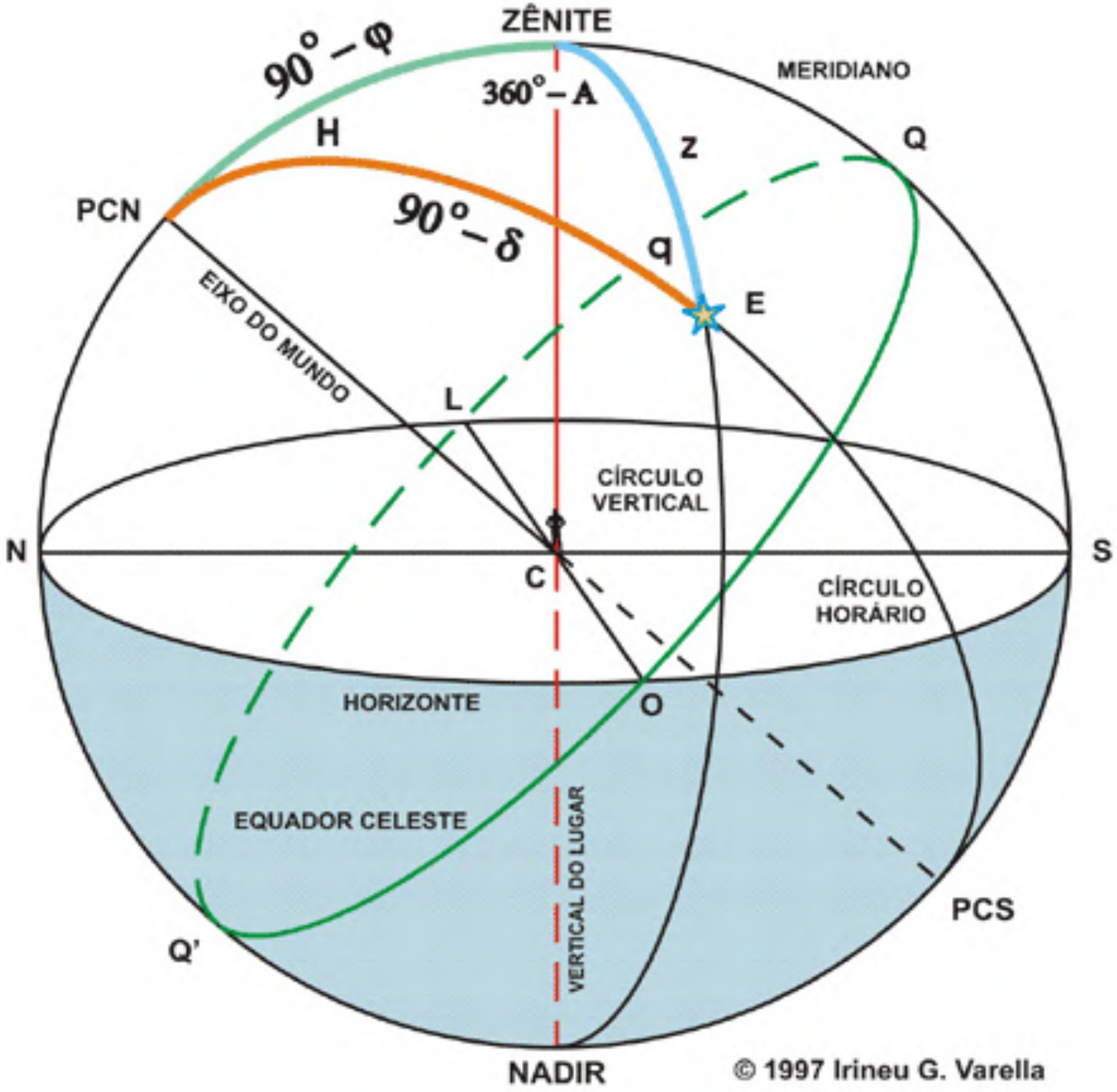
Triângulo Esférico

Um triângulo esférico é uma figura sobre uma superfície esférica que resulta quando consideramos três grandes círculos (ou círculos máximos) sobre essa superfície. Um grande círculo é qualquer círculo sobre a superfície esférica que a divida em dois hemisférios.



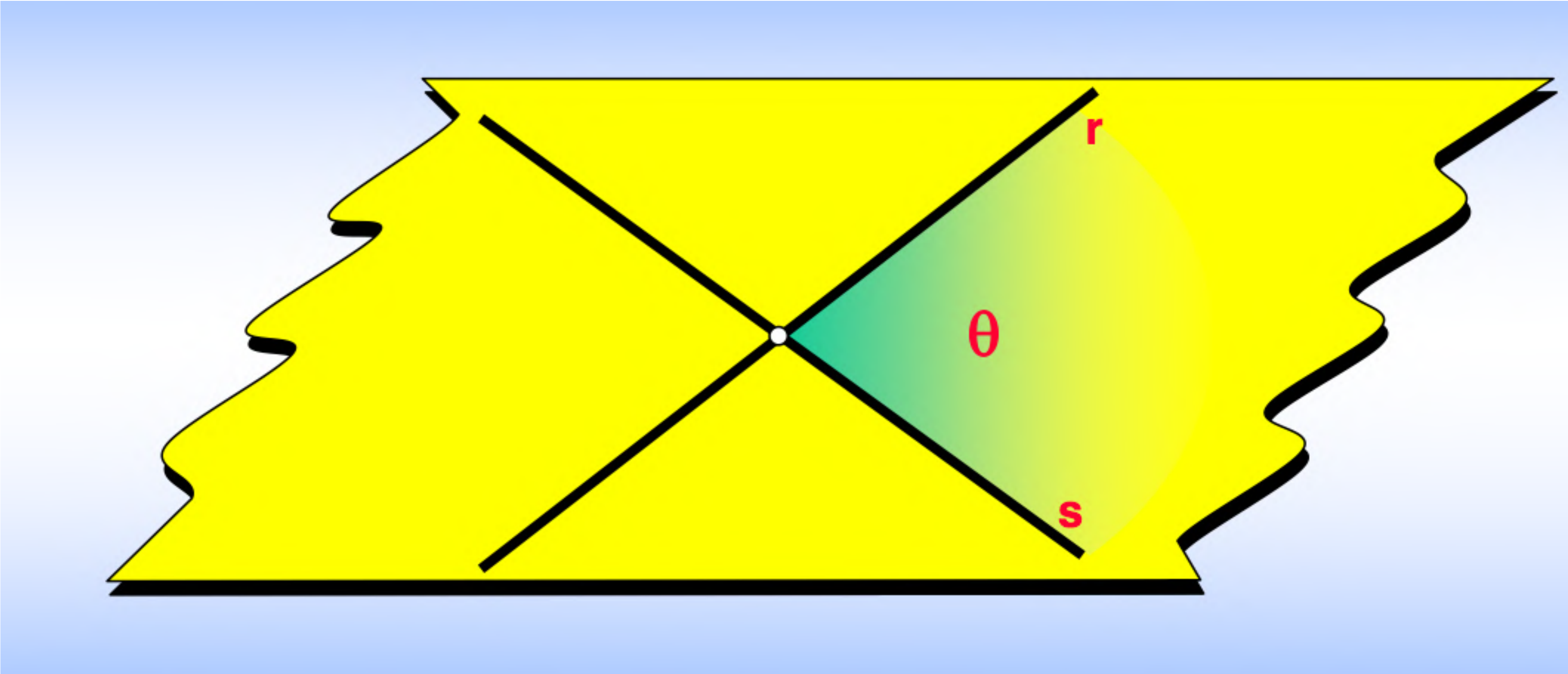
Importância para a Astronomia

Em qualquer instante, exceto pela passagem meridiana, um astro forma um triângulo esférico com o pólo celeste de seu hemisfério equatorial e com o zênite do observador.



Trigonometria plana: revisão

Ângulo Plano

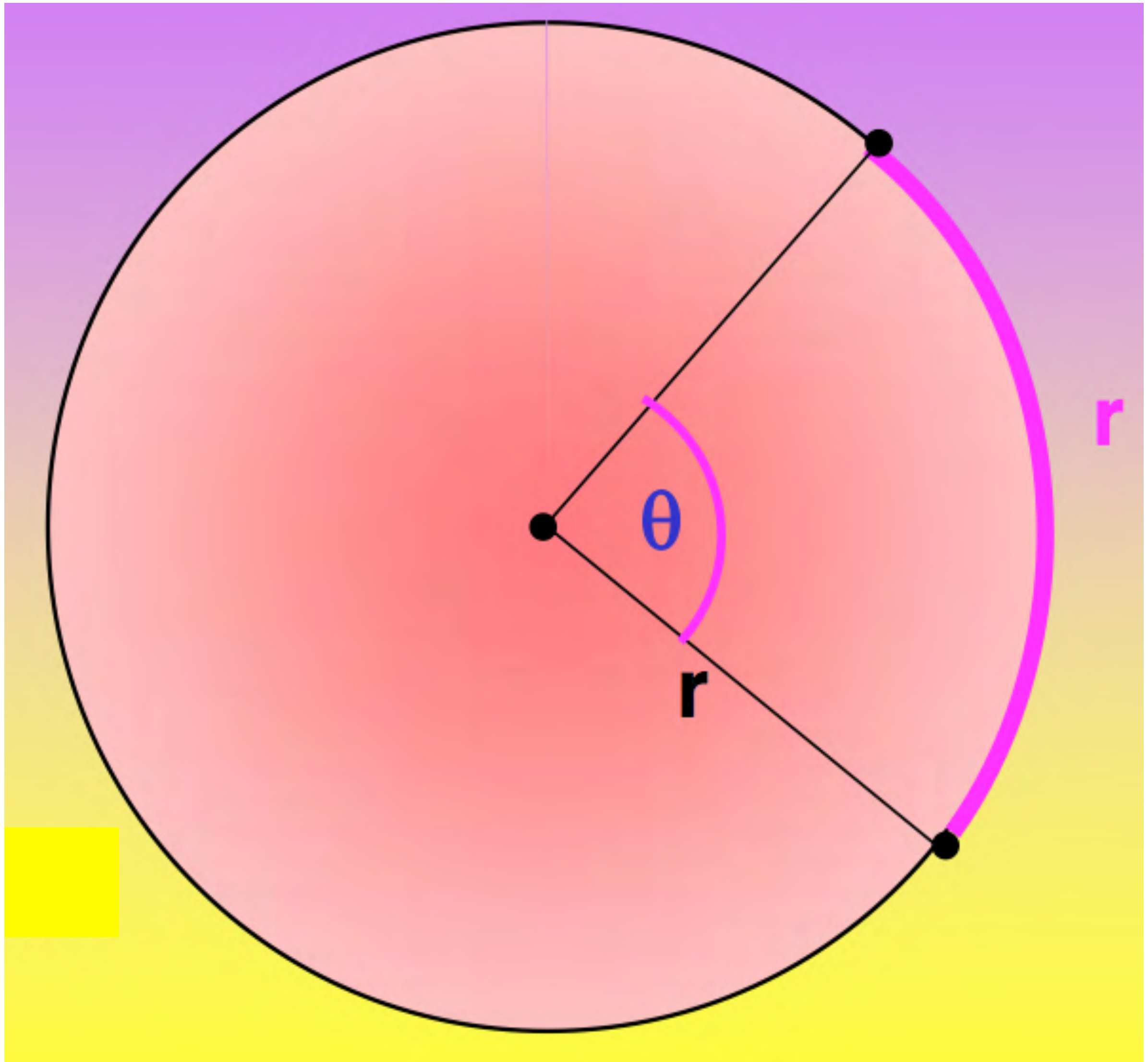


É a parte do plano compreeendida entre duas semiretas concorrentes que definem o plano.

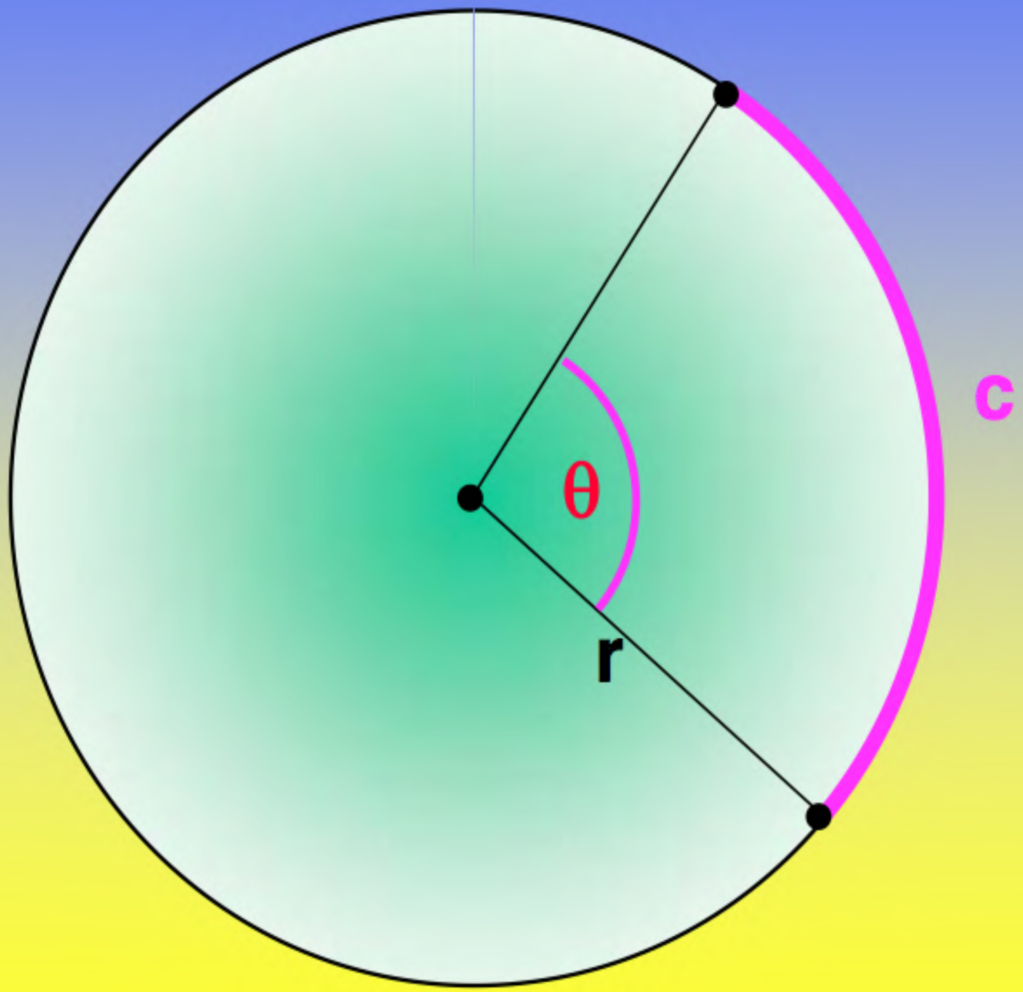
Definição de Radiano

Um radiano (1rad) é a medida θ do ângulo central que subentende um arco de comprimento igual ao raio da circunferência.

θ = 1rad



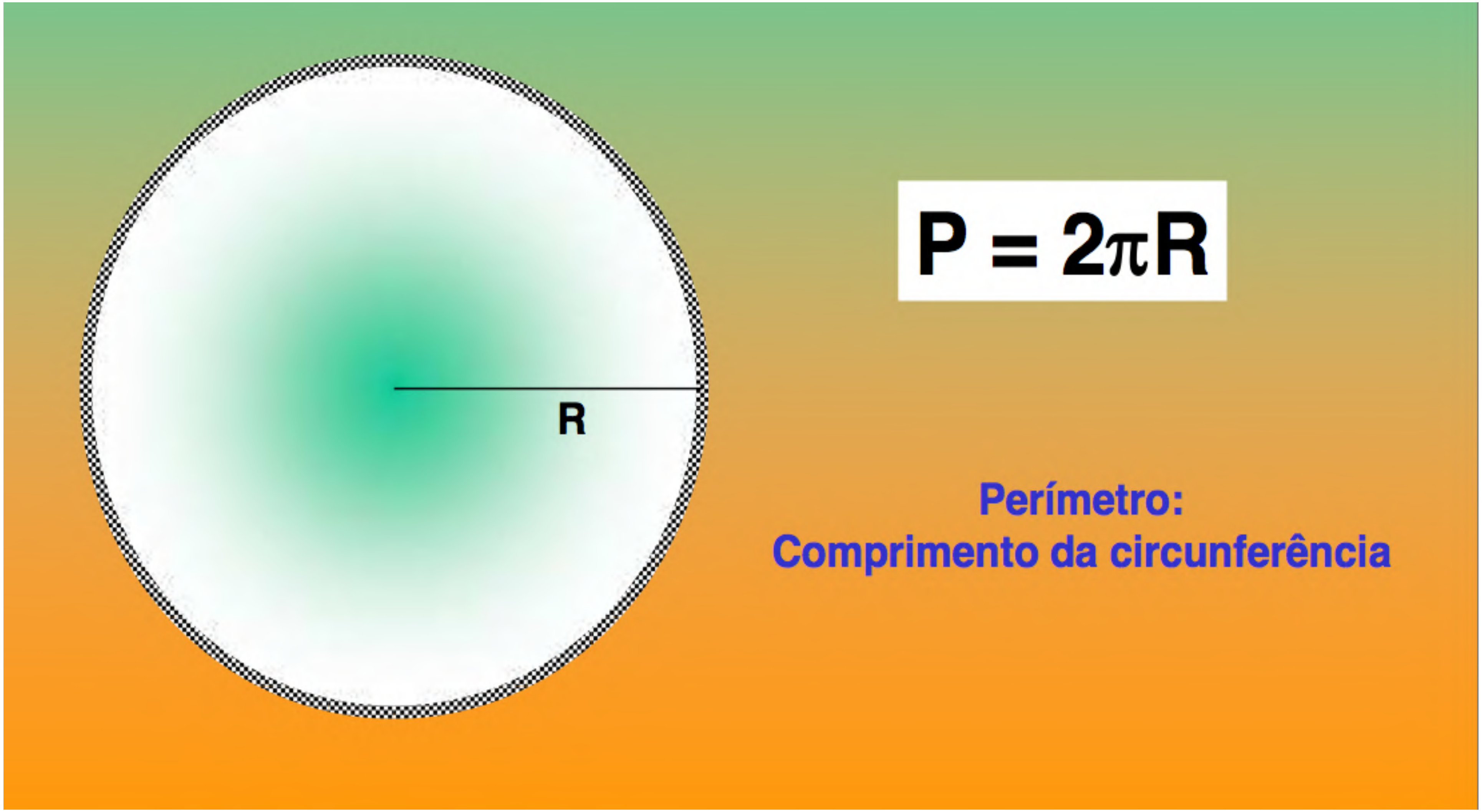
Ângulo em Radianos



$$\theta^{rad} \equiv c \,/\, r$$

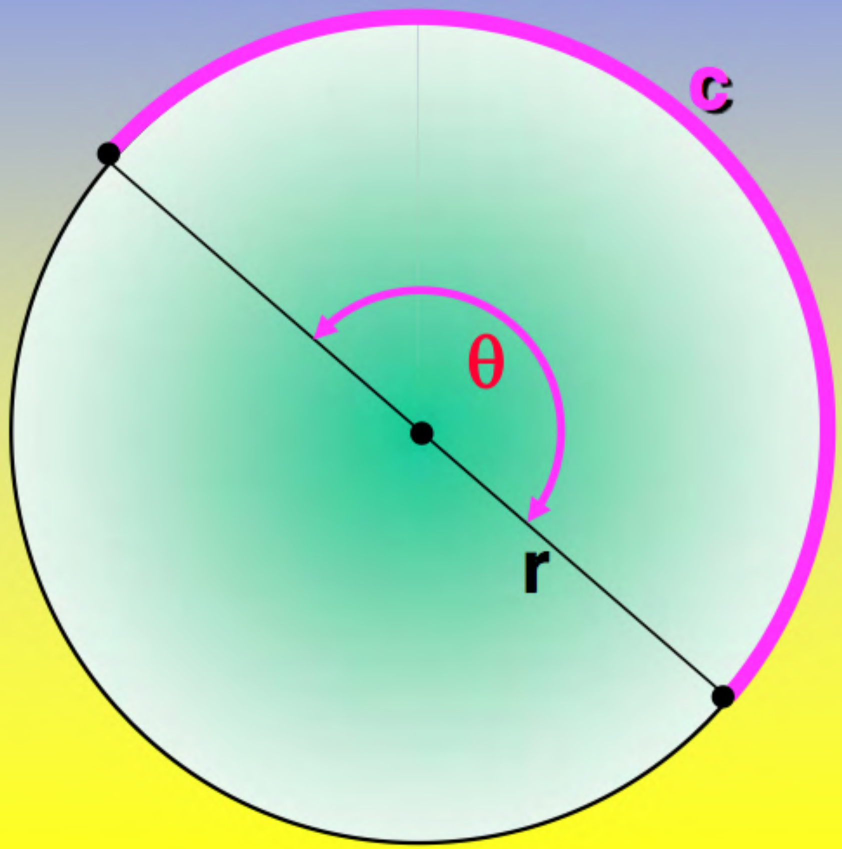
$$c = r \,.\, \theta^{rad}$$

Perímetro de uma Circunferência



Ângulo Raso em Radianos

$$P = 2\pi r$$



$$c = P / 2$$

$$c = 2\pi r / 2$$

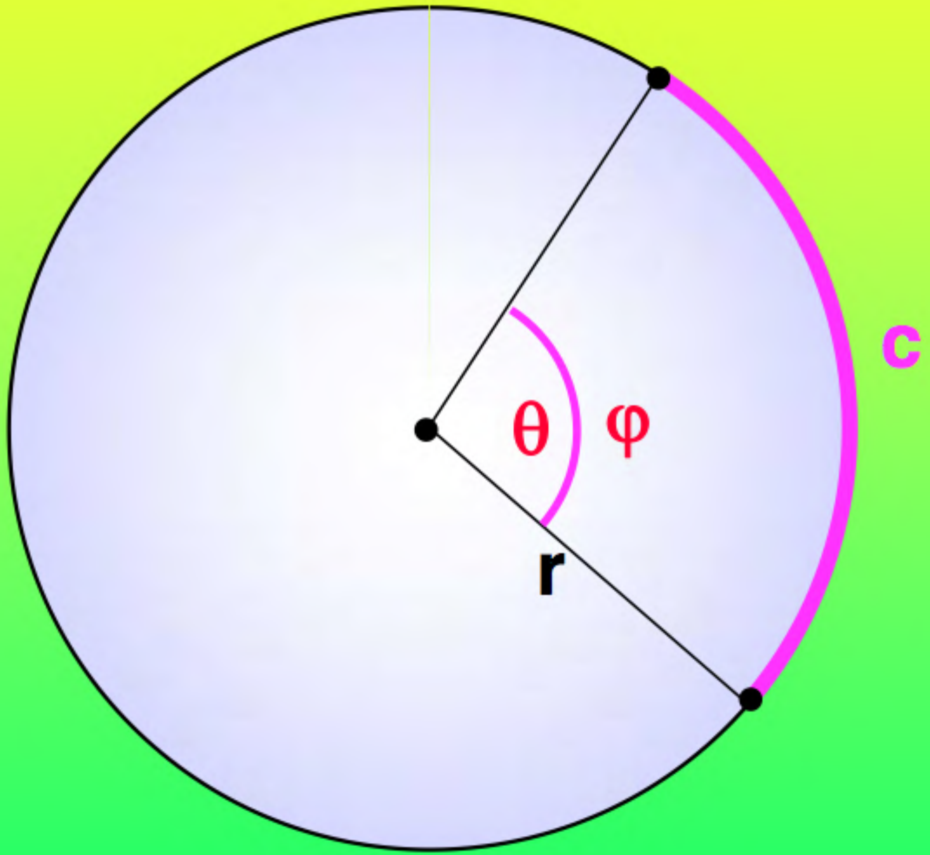
$$c = \pi r$$

$$\theta_{raso}{}^{rad} \equiv c / r$$

$$\theta_{raso}{}^{rad} = \pi r / r$$

$$\boxed{\theta_{raso} = \pi^{\ rad}}$$

Graus e Radianos



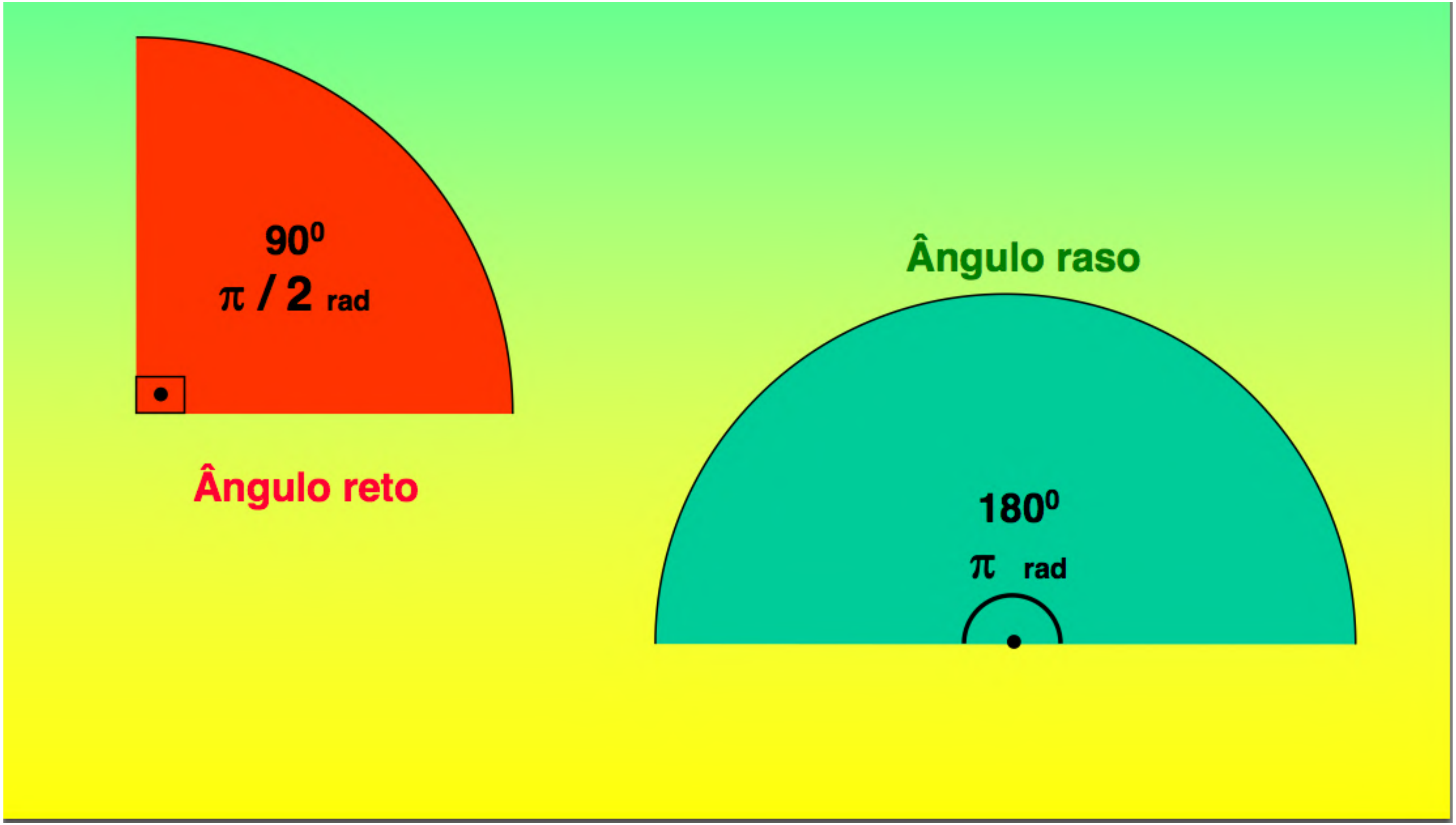
$360^{o} \rightarrow 2\pi$ rad

$\varphi^{o} \rightarrow \theta$ rad

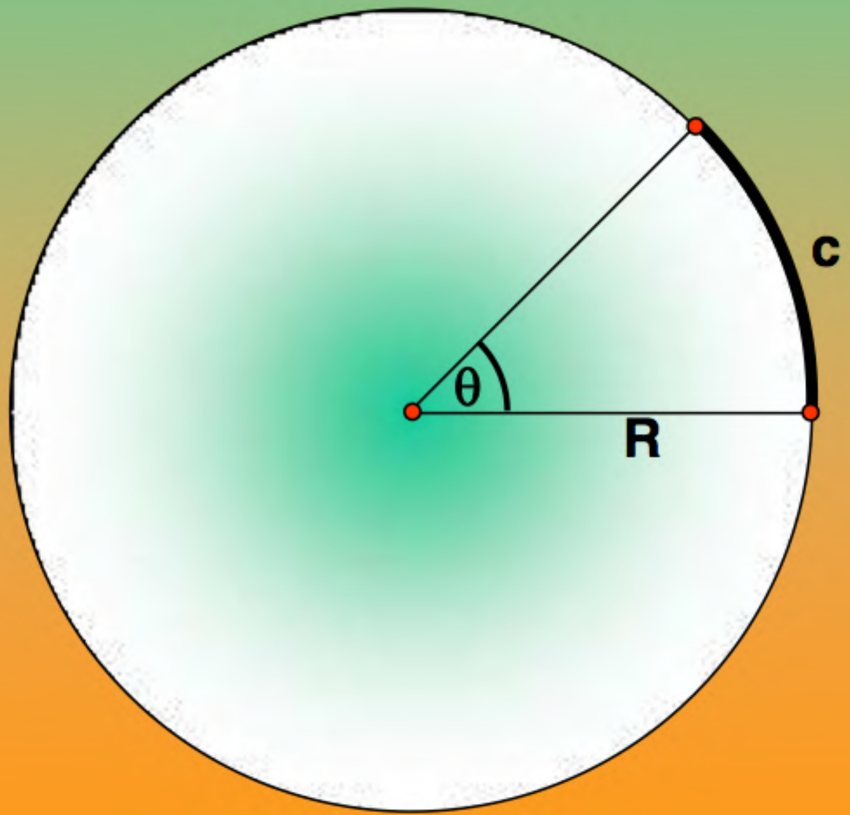
$$\varphi^{o} = \theta^{rad} . 180 / \pi$$

$$\theta^{rad} = \varphi^{o} . \pi / 180$$

Ângulos Particulares



Comprimento de um Arco de Circunferência



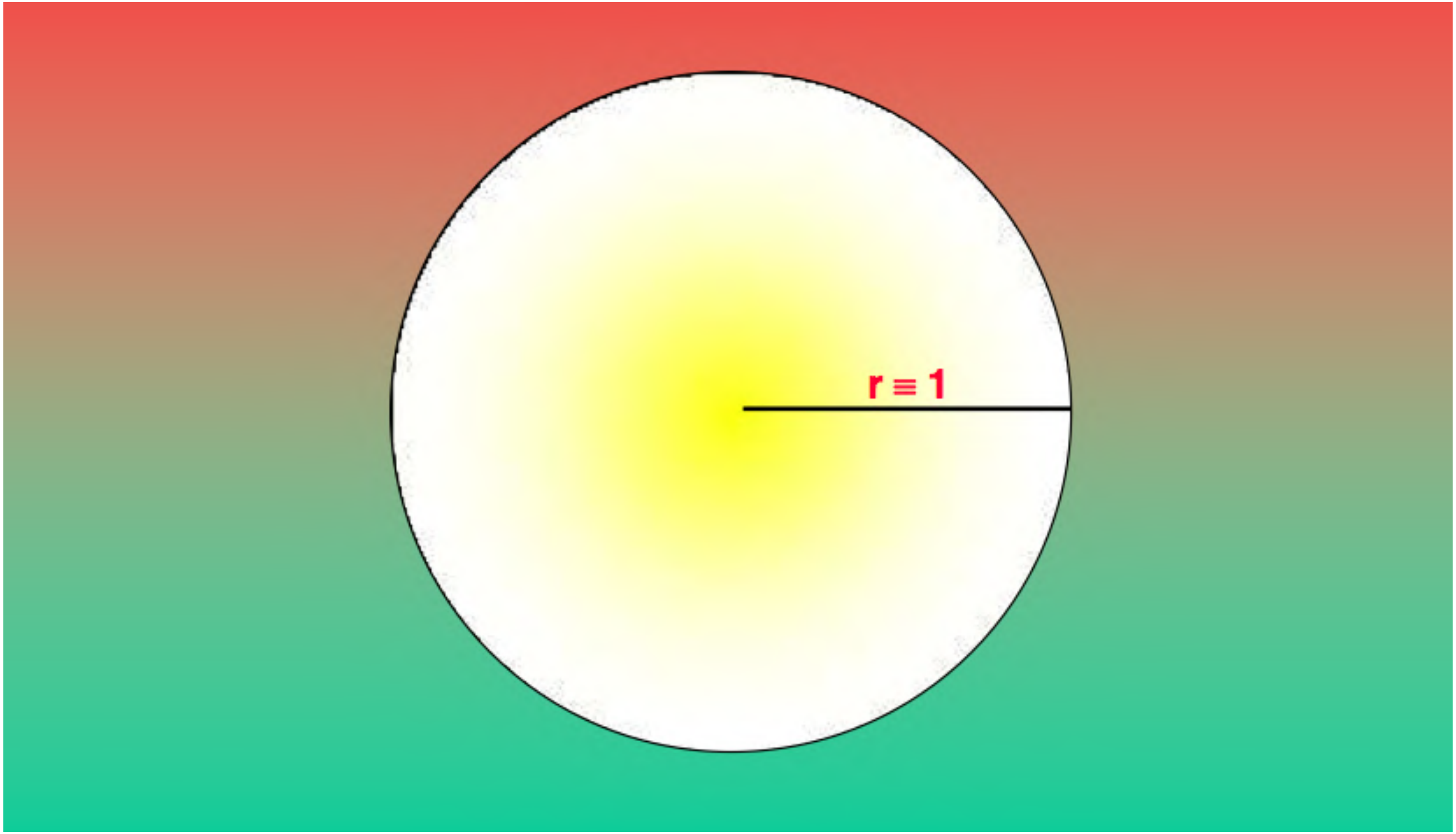
$360^\circ \Rightarrow 2\pi R$

$\theta^\circ \Rightarrow c$

$c = 2\pi R \,.\, \theta^\circ / 360^0$

$c = \pi R \,.\, \theta^\circ / 180^0$

Círculo Trigonométrico



Seno & Co-seno

Seno x = cateto oposto / hipotenusa

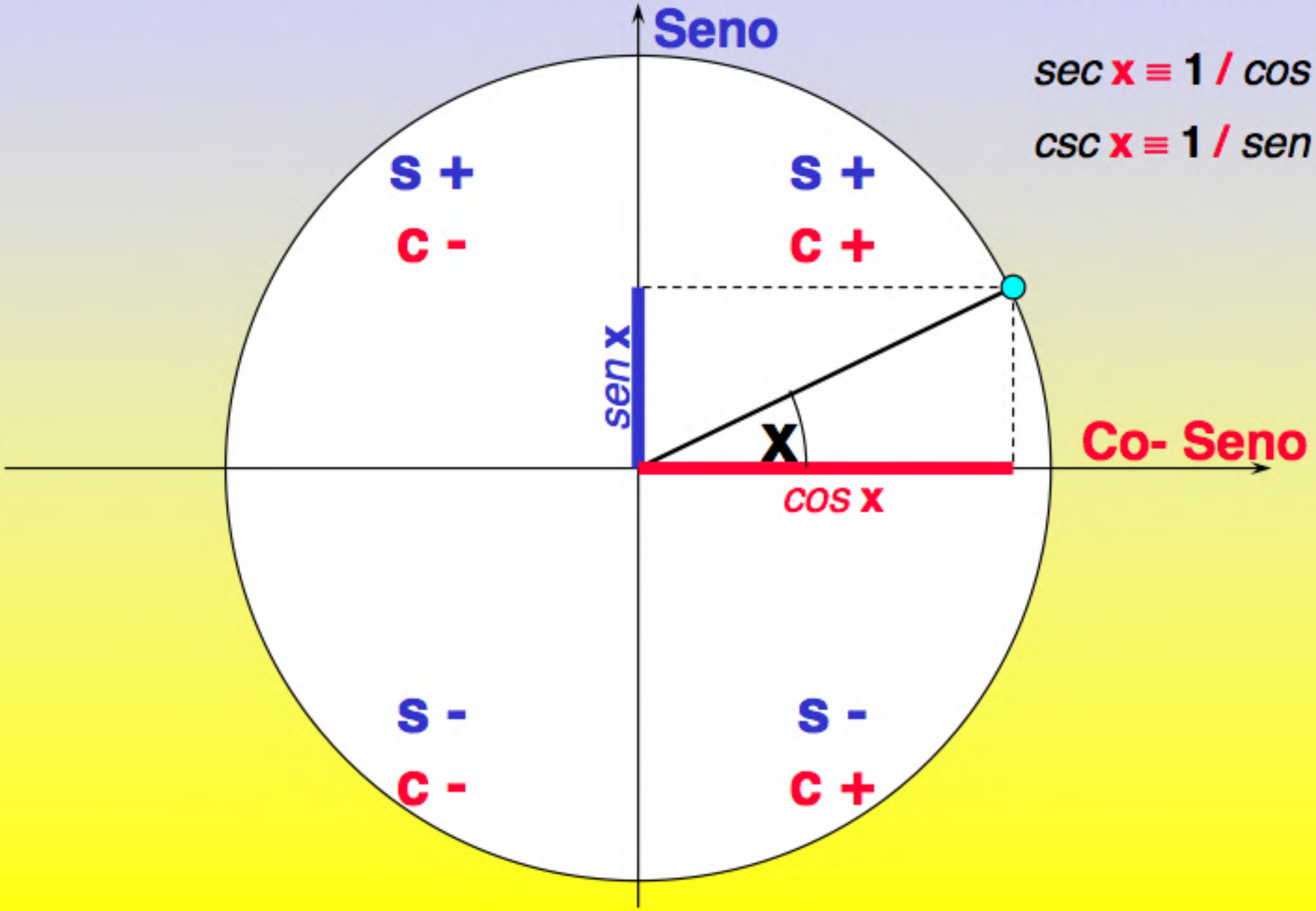
Coseno x = cateto adjacente / hipotenusa

tan **x** ≡ *sen* **x** / *cos* **x**

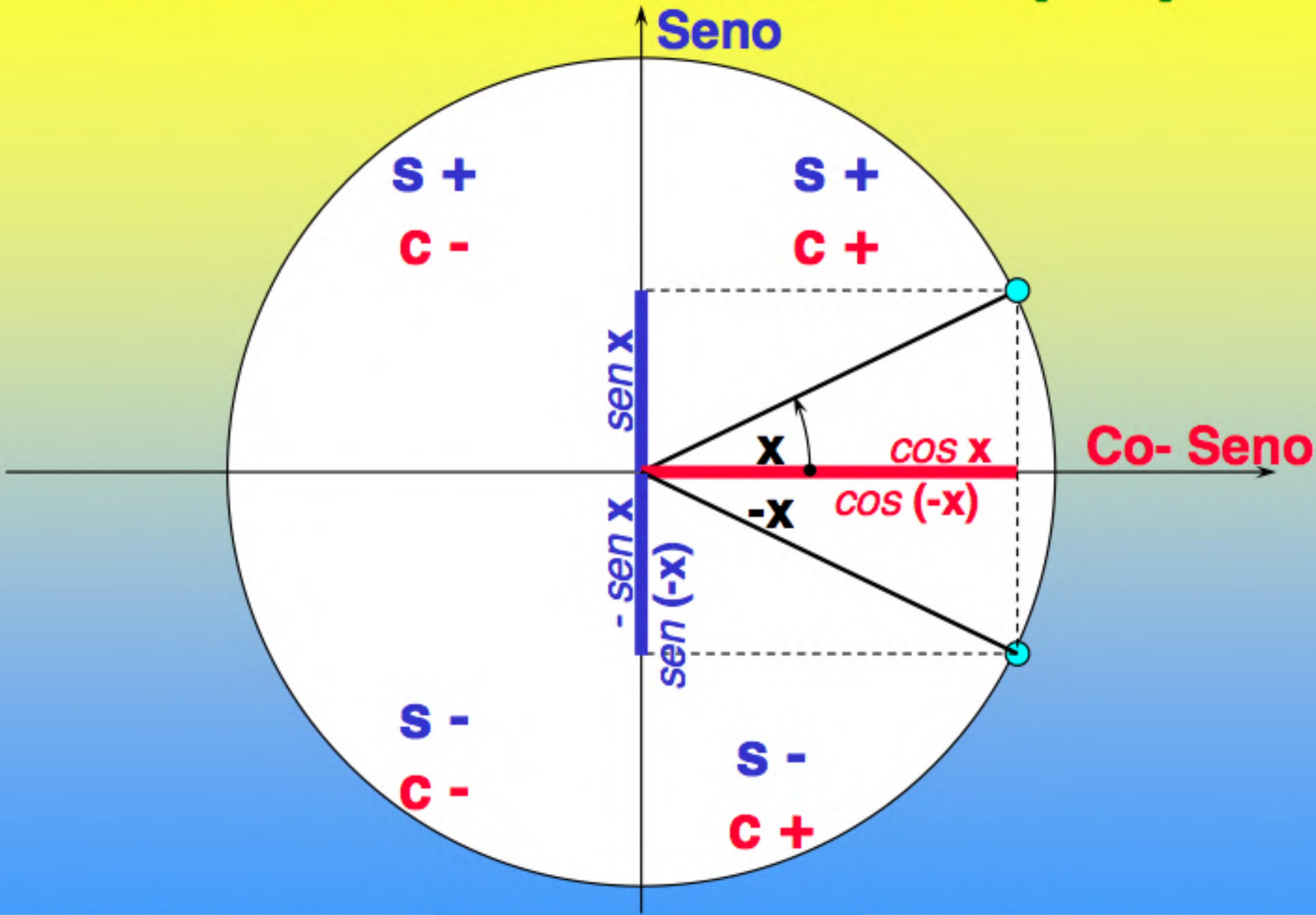
cot **x** ≡ *cos* **x** / *sen* **x**

sec **x** ≡ **1** / *cos* **x**

csc **x** ≡ **1** / *sen* **x**



Seno & Co-seno de (- x)



$\textit{sen}\ (-\mathbf{x}) = -\ \textit{sen}\ \mathbf{x}$

$\textit{cos}\ (-\mathbf{x}) = \textit{cos}\ \mathbf{x}$

Funções com ângulos

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\bigcirc = - \; +$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \bigcirc \sin a \sin b$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\tan(a \pm b) = [\tan a \pm \tan b] / [1 \bigcirc \tan a \tan b]$$

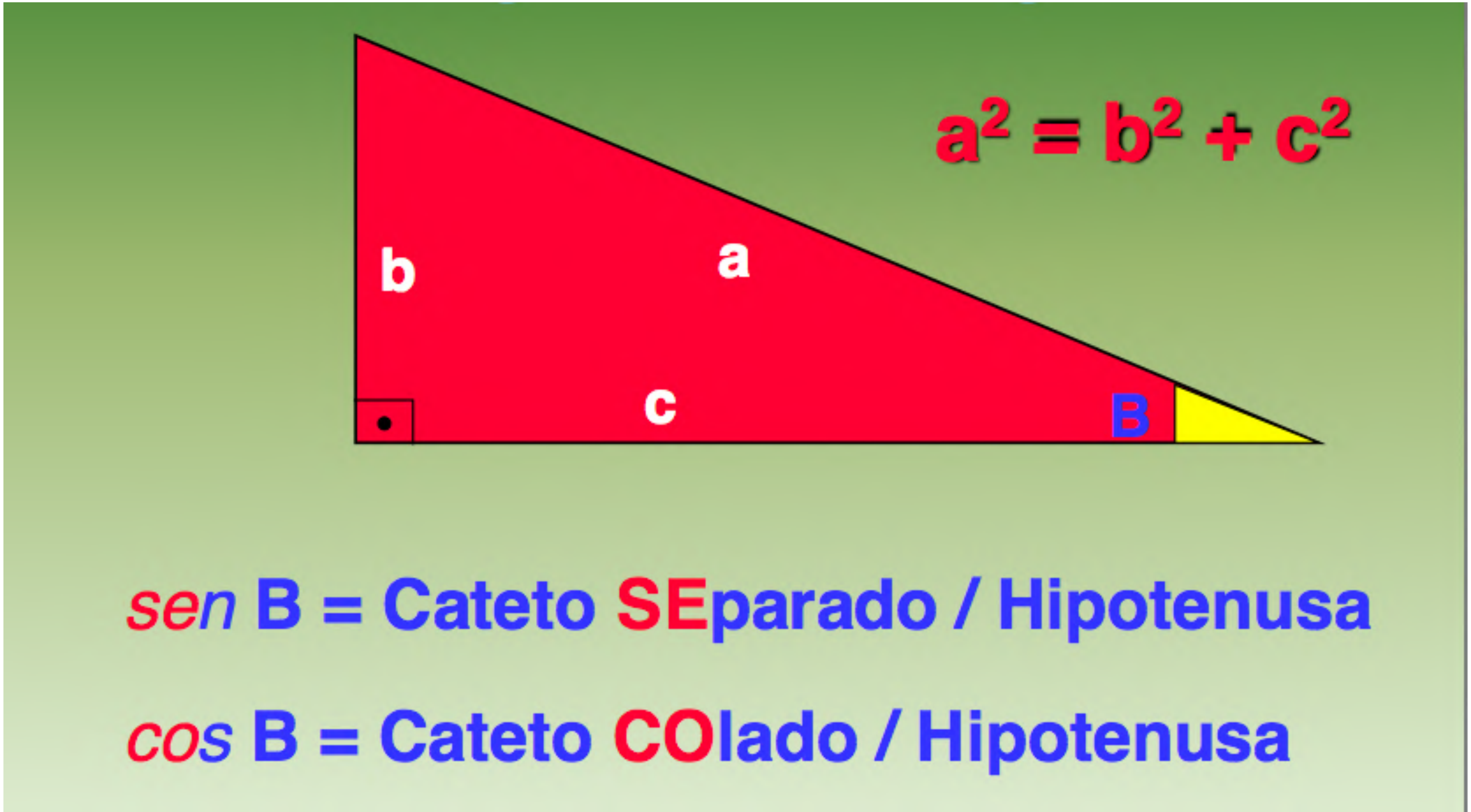
$$\tan(2a) = [2 \tan a] / [1 - \tan^2 a]$$

$$\sin a/2 = \sqrt{\{ [1 - \cos a] / 2 \}}$$

$$\cos a/2 = \sqrt{\{ [1 + \cos a] / 2 \}}$$

$$\tan a/2 = \sqrt{\{ [1 - \cos a] / [1 + \cos a] \}}$$

Trigonometria no Triângulo Retângulo

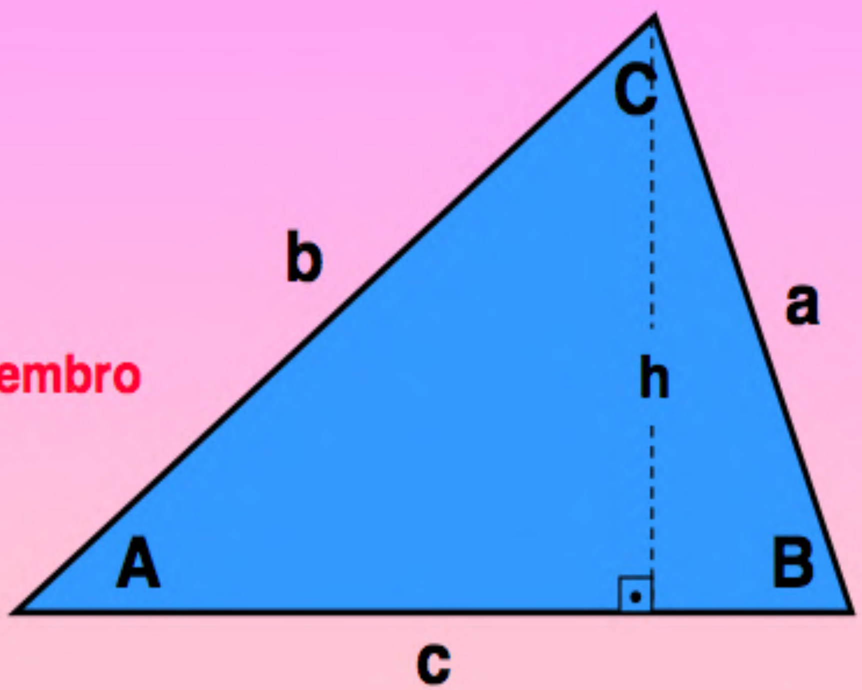


Equação do seno num Triângulo Qualquer

sen A = h / b

sen B = h / a

Dividir membro a membro

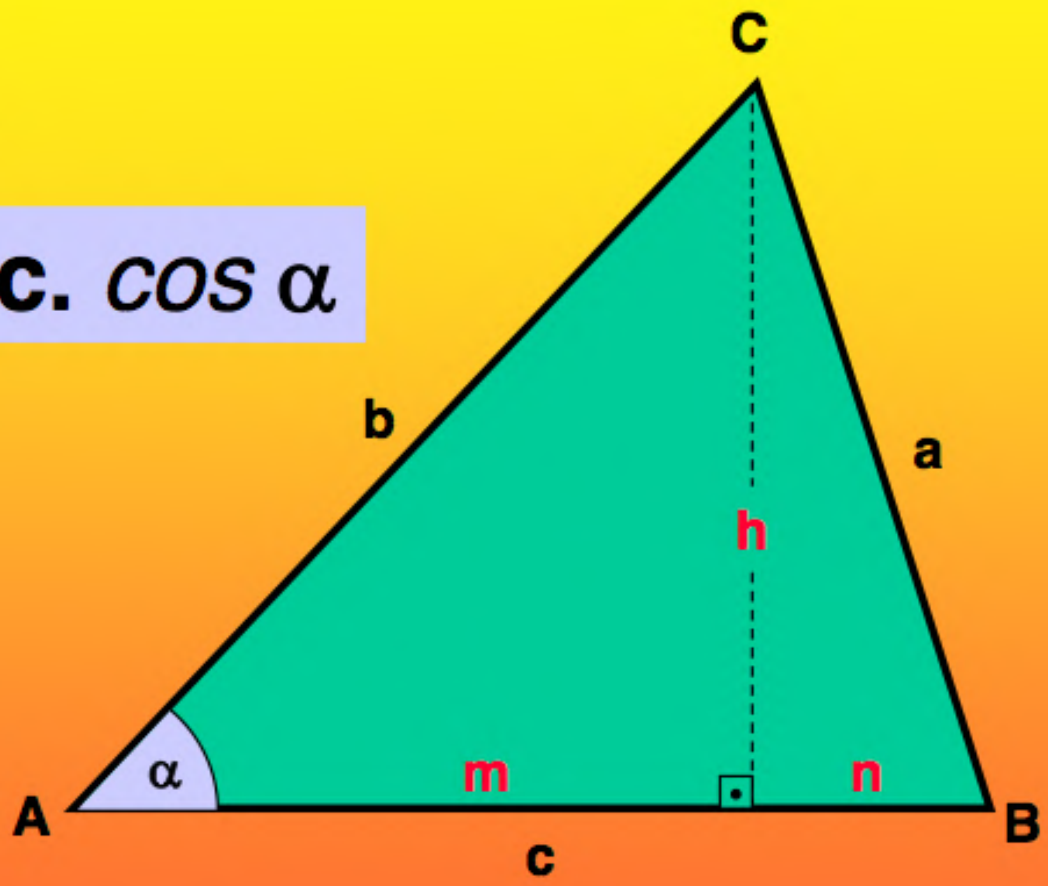


a / *sen* A = b / *sen* B = c / *sen* C

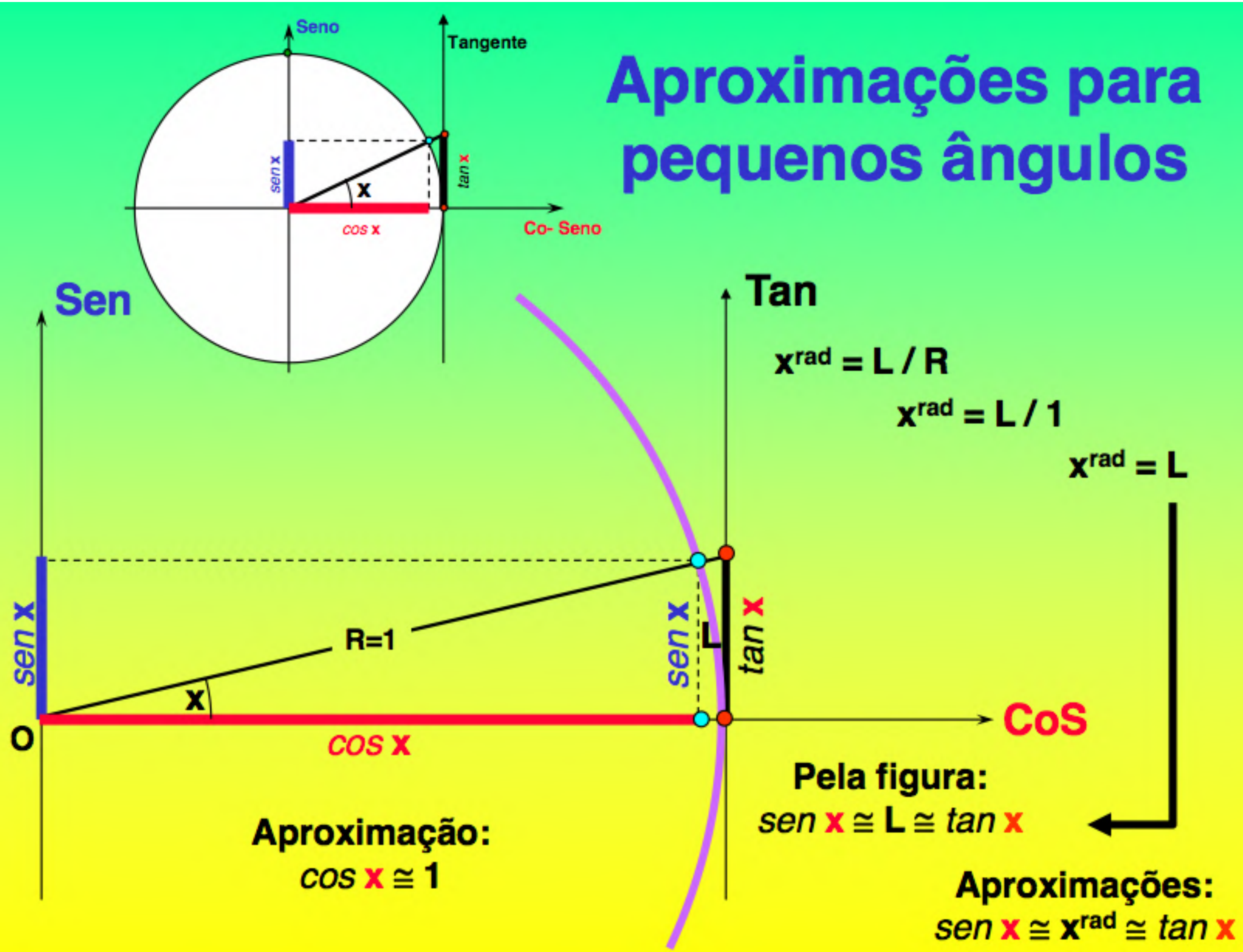
Equação do co-seno num Triângulo Qualquer

$$\cos\alpha = m / b$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$



Aproximações para pequenos ângulos



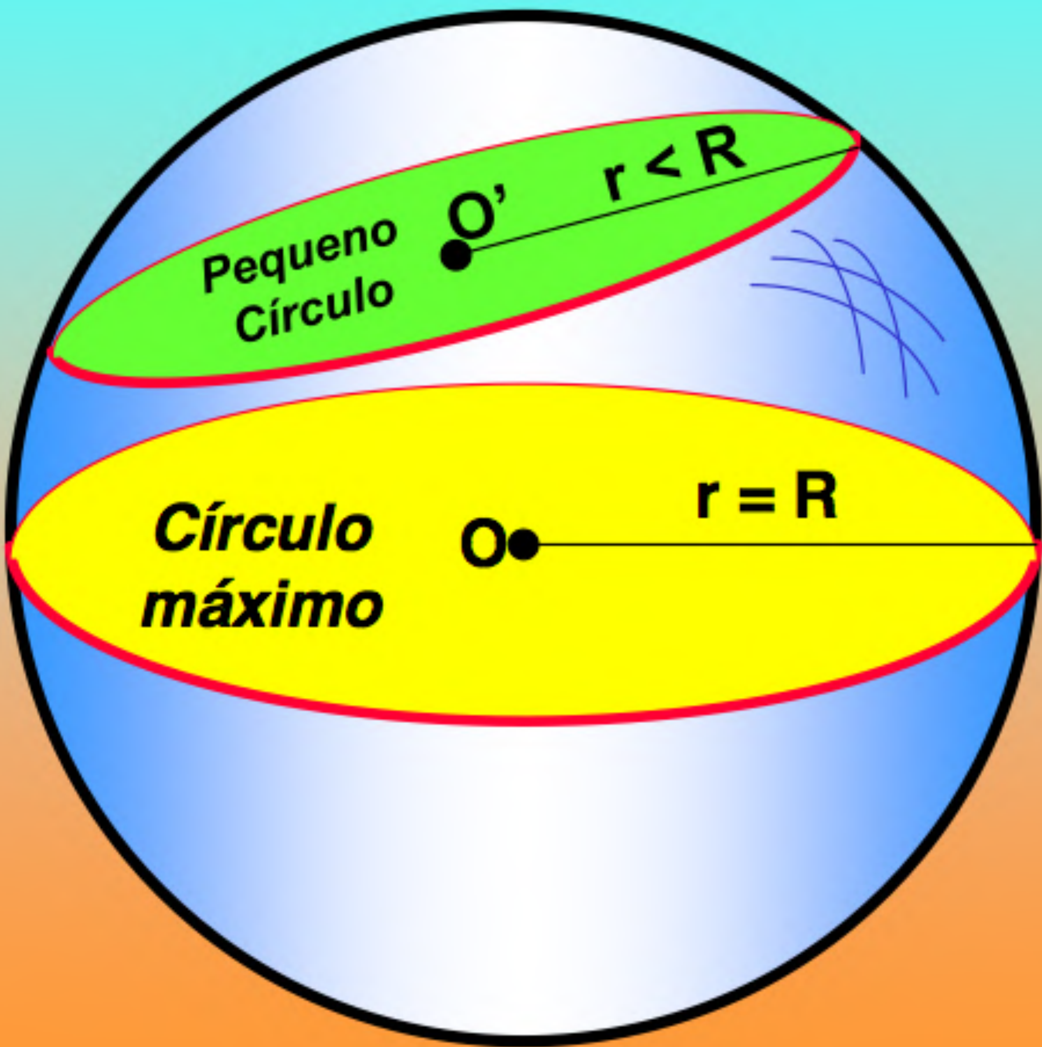
Pela figura:
$sen\ x \cong L \cong tan\ x$

Aproximação:
$cos\ x \cong 1$

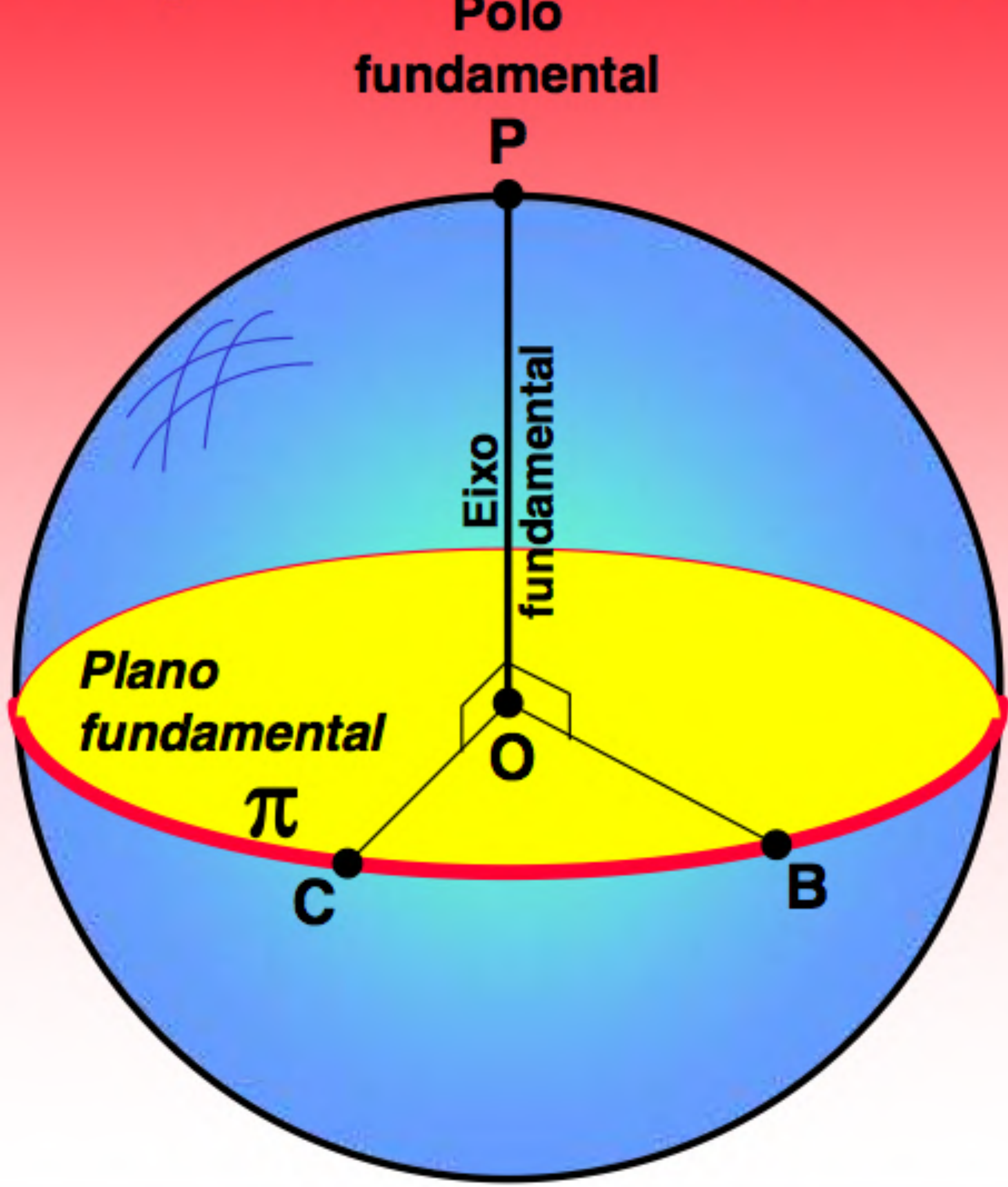
Aproximações:
$sen\ x \cong x^{rad} \cong tan\ x$

Trigonometria esférica

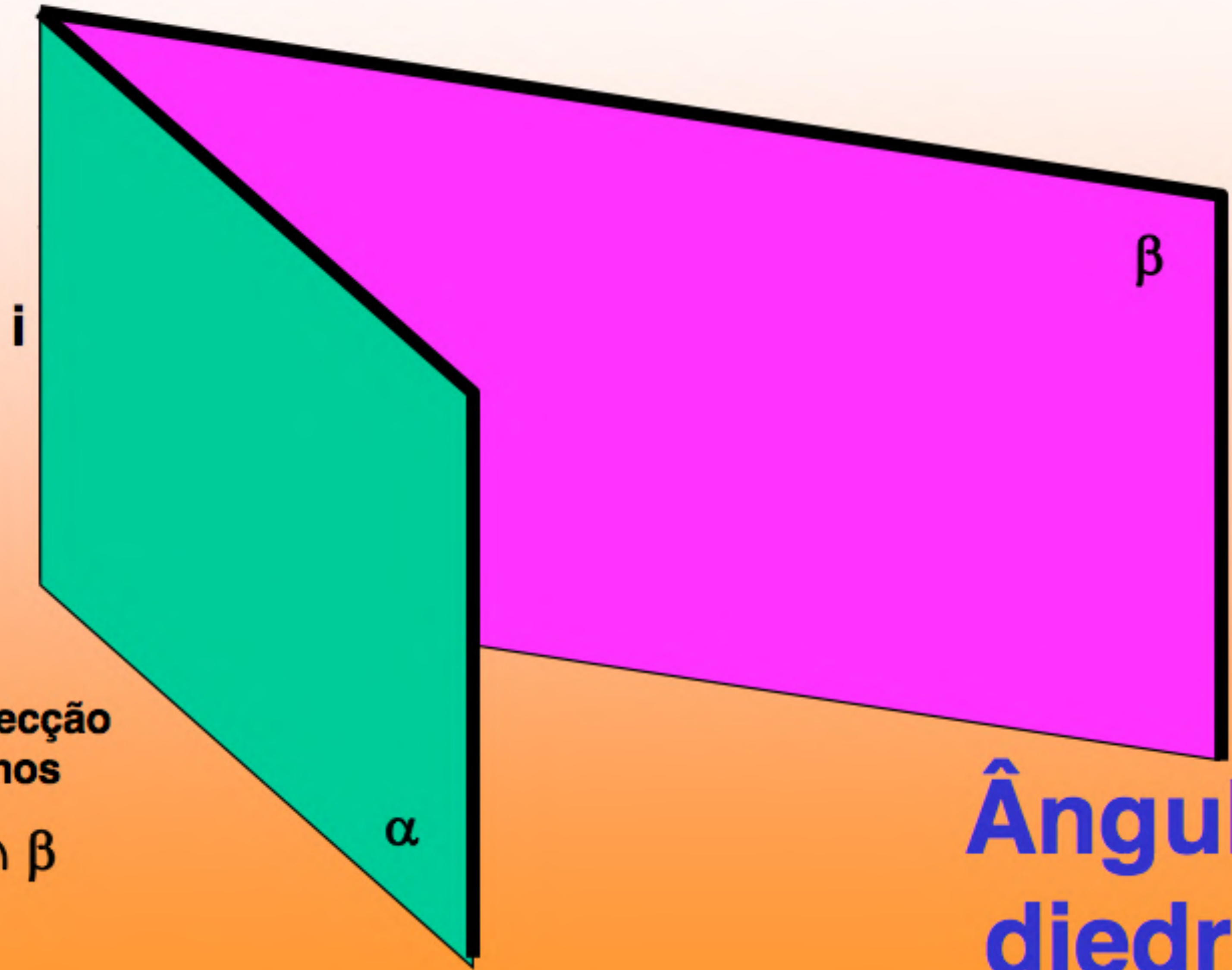
Grandes e pequenos círculos



Polo e plano fundamentais



Ângulo entre os planos α e β

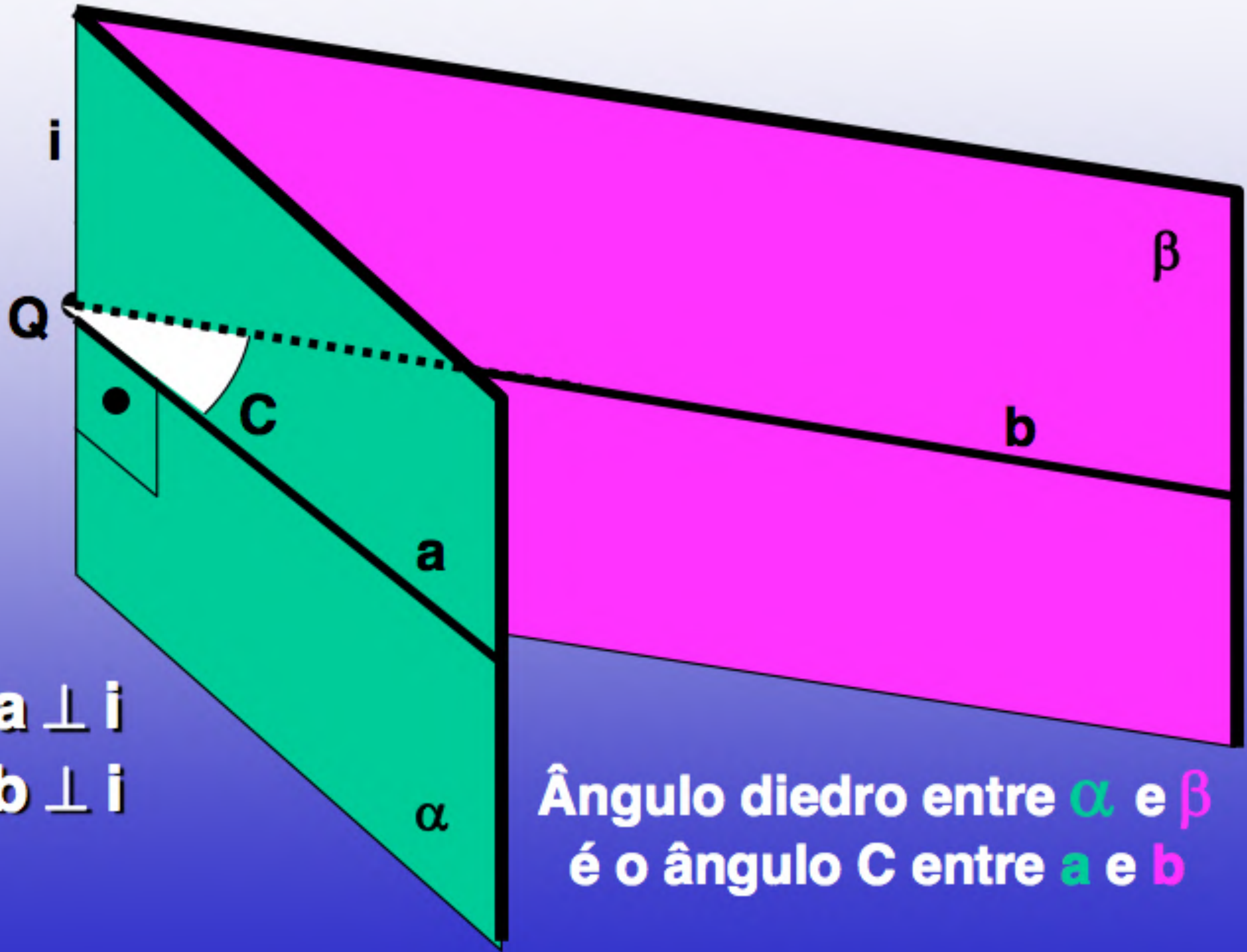


Linha intersecção dos 2 planos

$i \equiv \alpha \cap \beta$

Ângulo diedro

Ângulo diedro



$a \in \alpha$

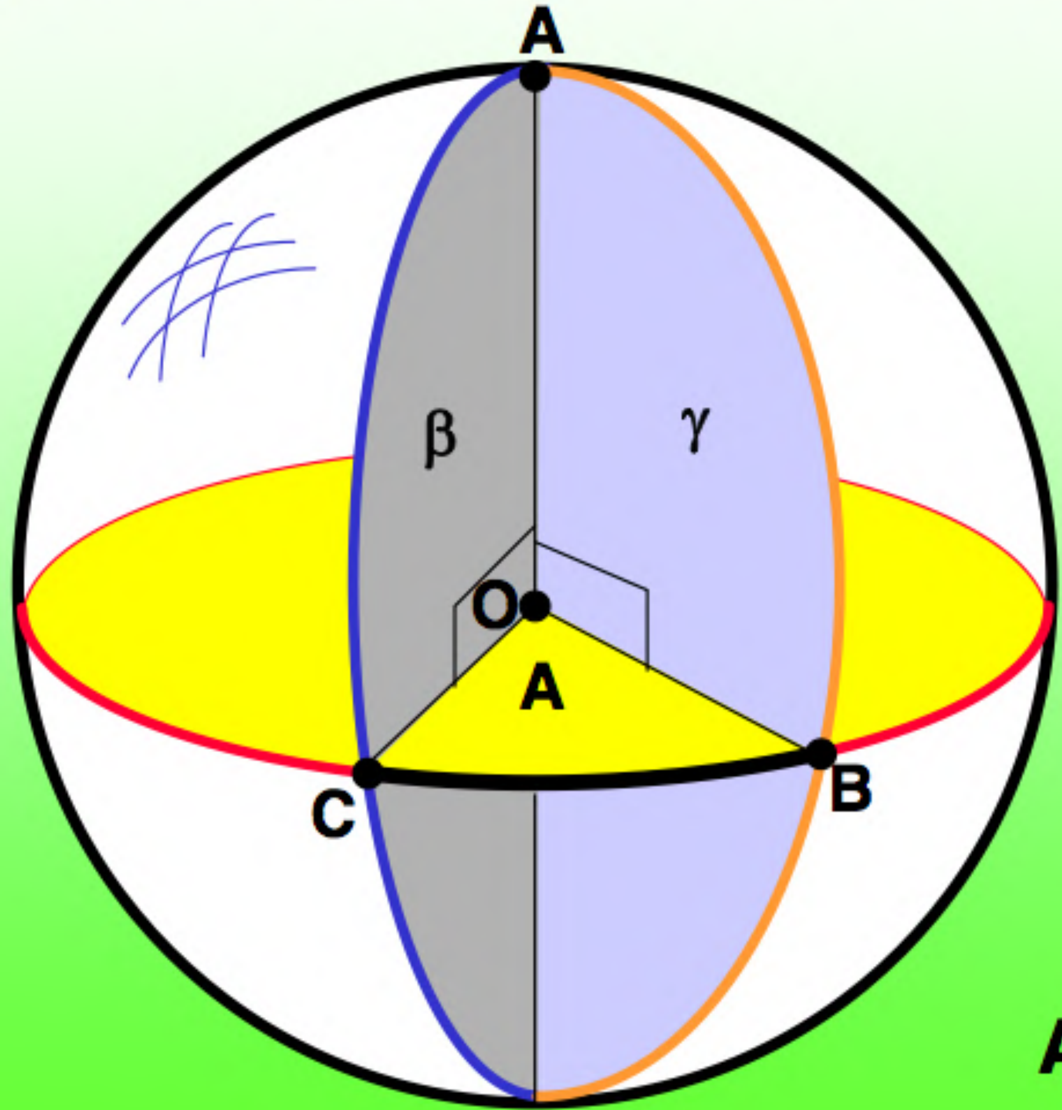
$b \in \beta$

$a \perp i$

$b \perp i$

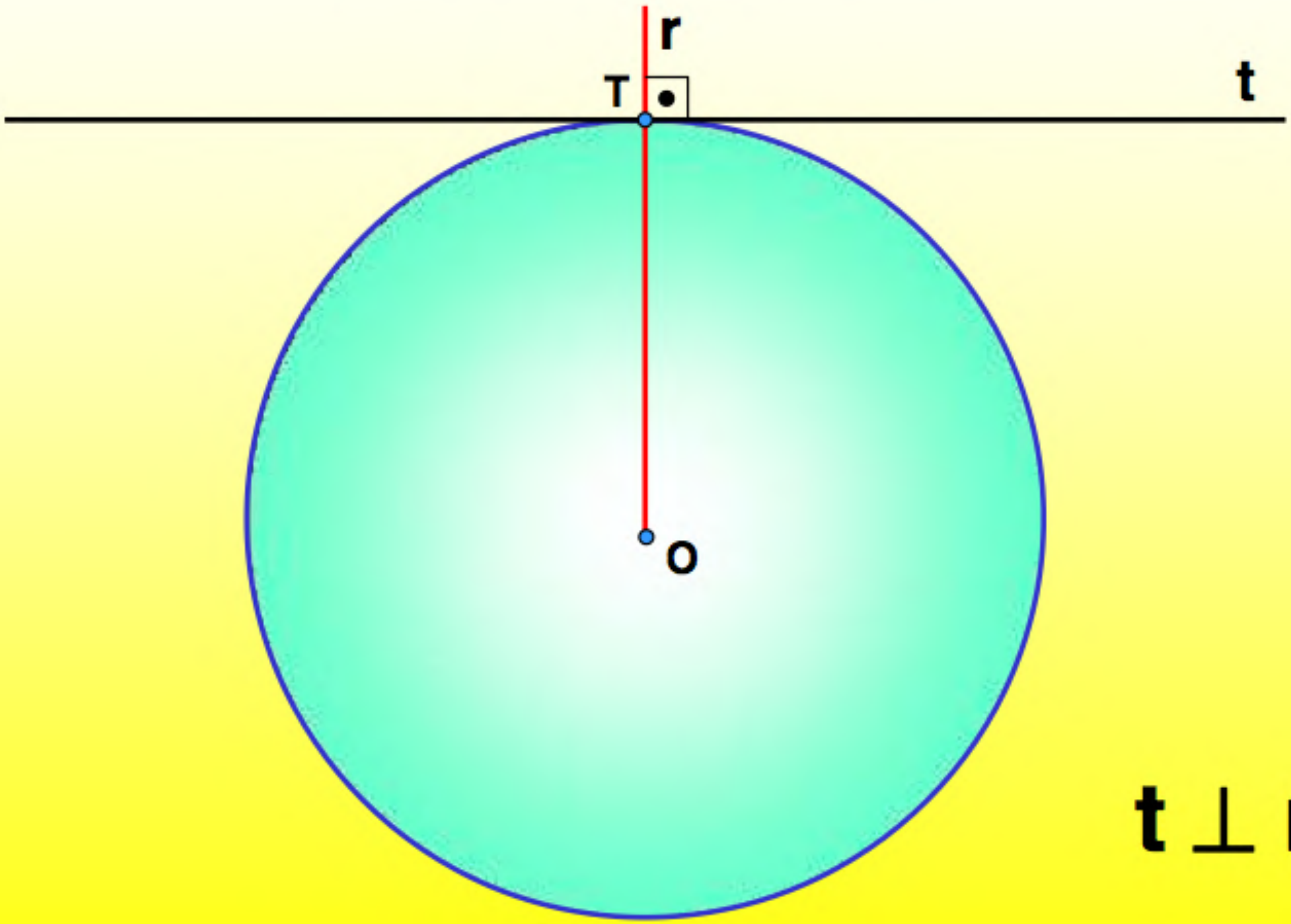
Ângulo diedro entre α e β é o ângulo C entre a e b

Ângulo diedro A na esfera



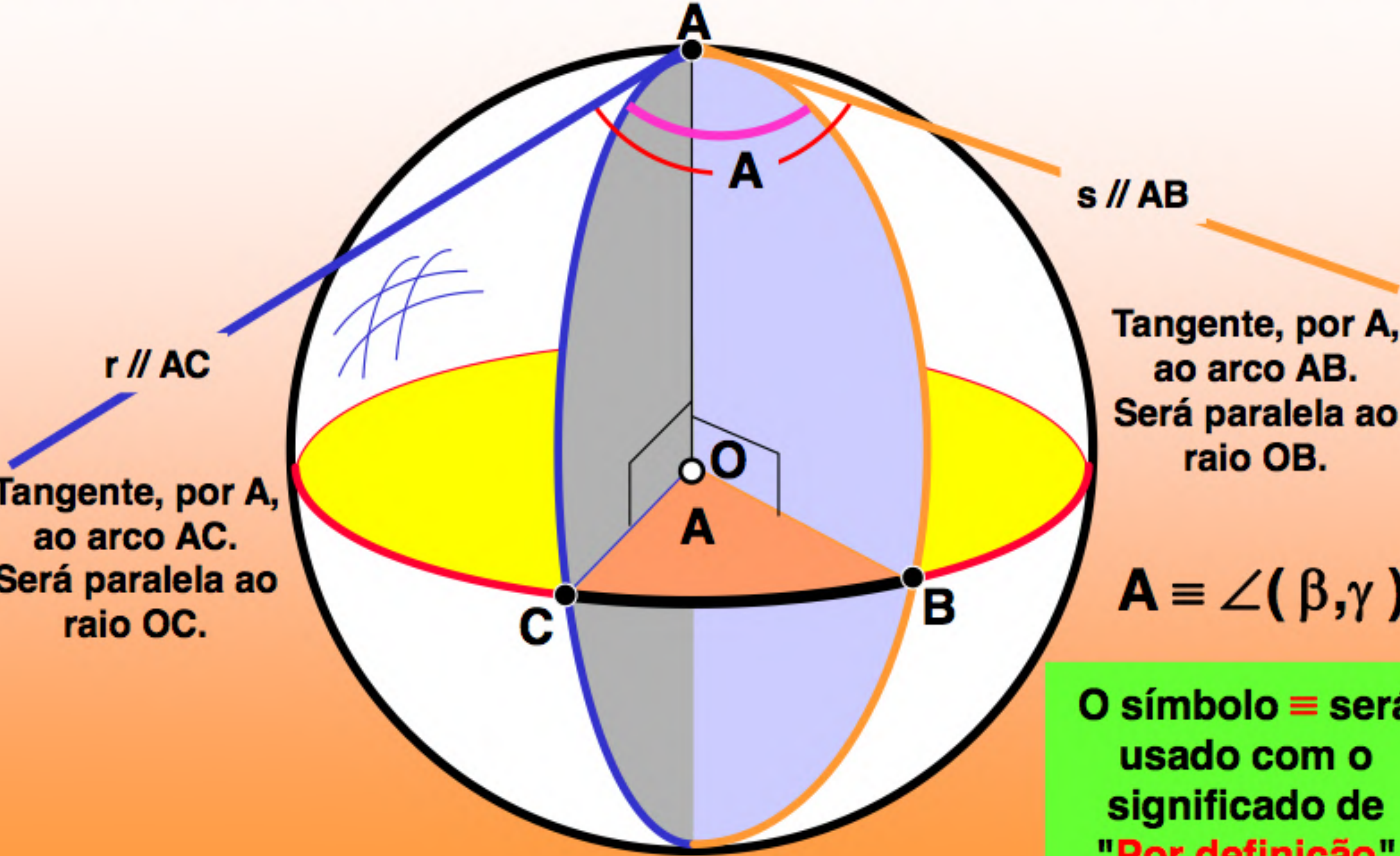
$$A \equiv \angle(\beta, \gamma)$$

Reta **t** tangente a uma circunferência



$t \perp r$

Ângulo diedro A dado por tangentes



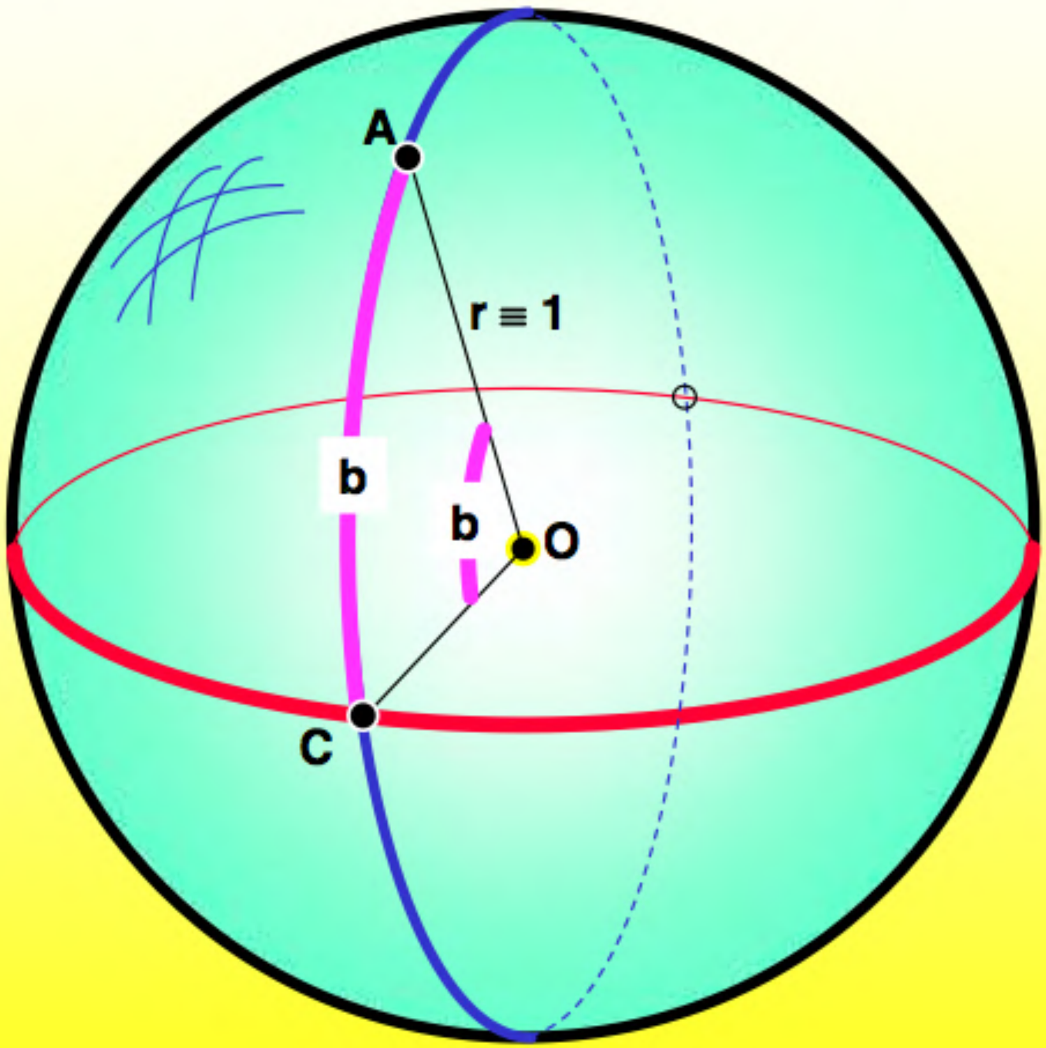
Tangente, por A, ao arco AC. Será paralela ao raio OC.

Tangente, por A, ao arco AB. Será paralela ao raio OB.

$$A \equiv \angle(\beta, \gamma)$$

O símbolo $\equiv$ será usado com o significado de "Por definição"

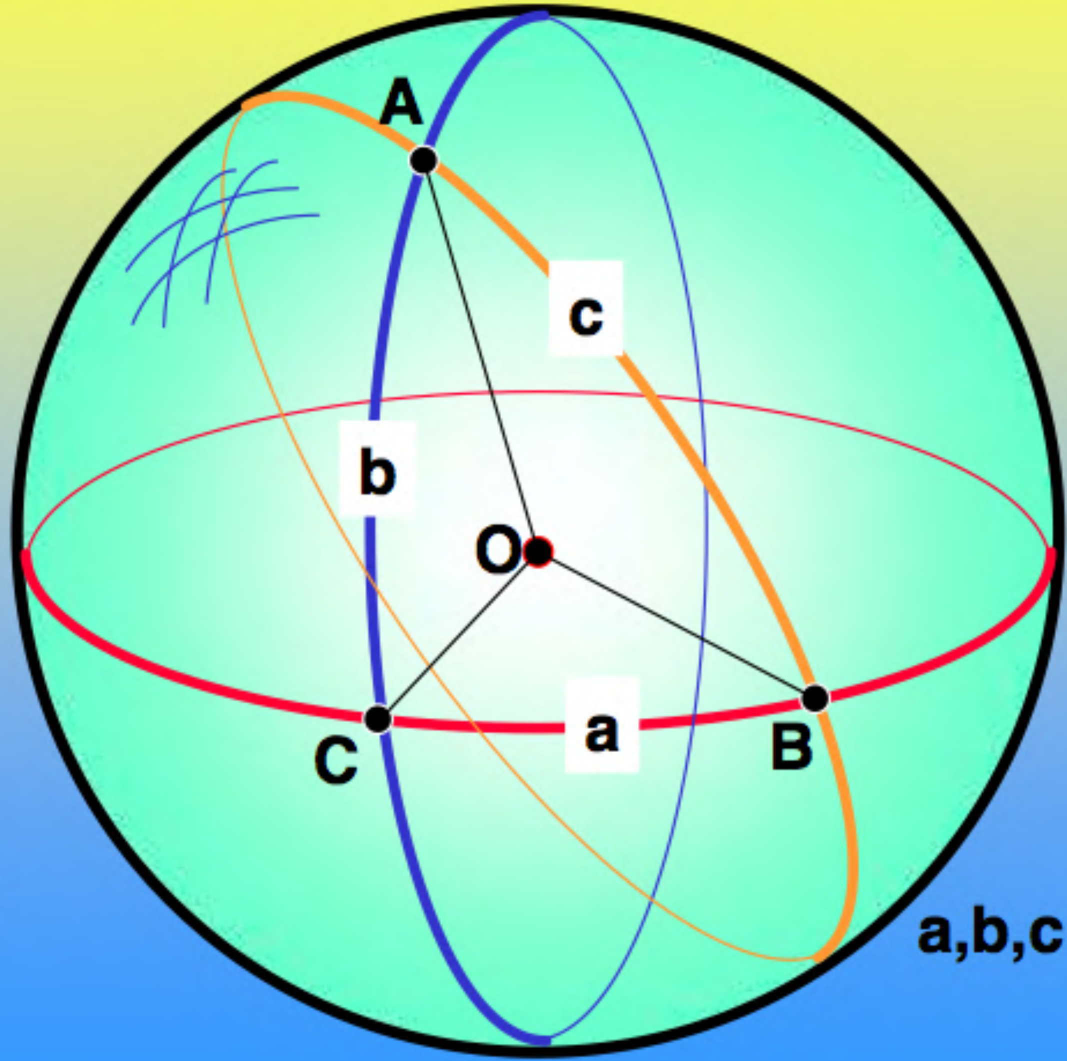
Ângulo central



$b \equiv \angle A\hat{O}C$

Definição de Triângulo Esférico

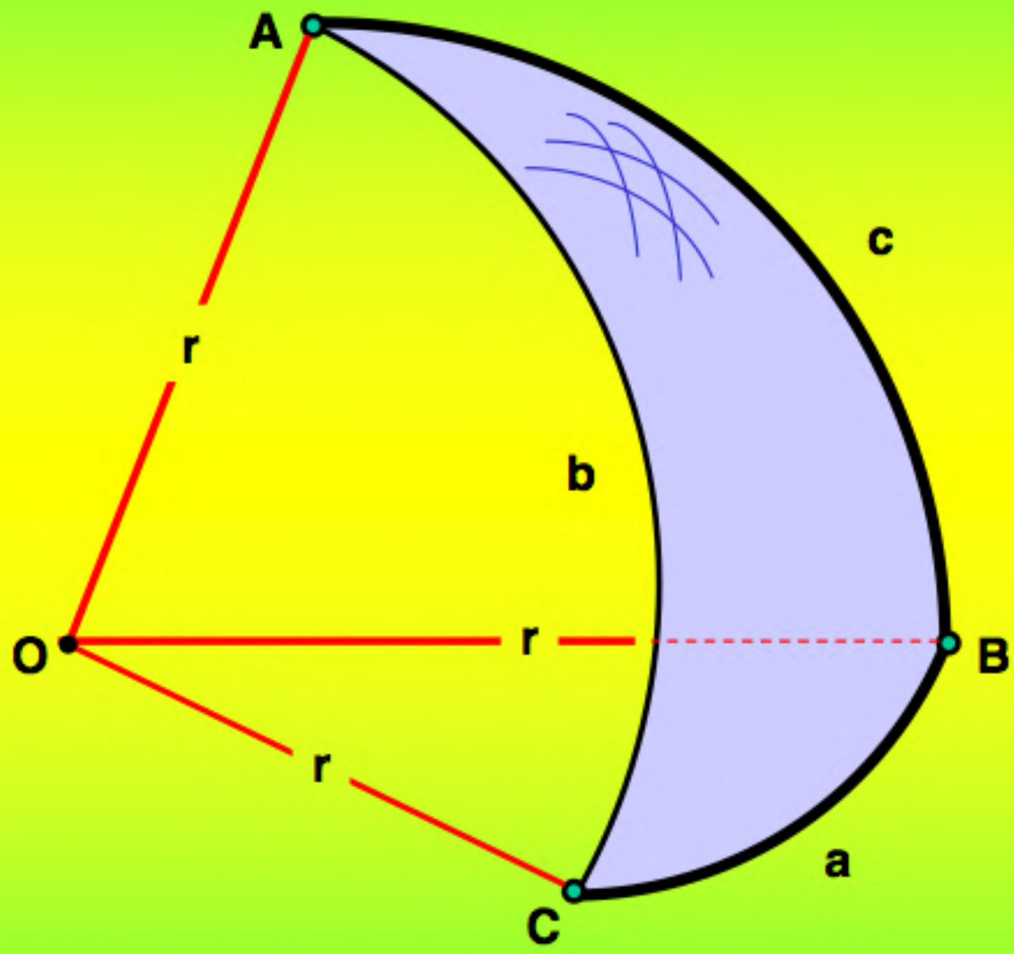
Triângulo esférico é a região da esfera delimitada pela intersecção, dois a dois, de 3 planos passantes pelo centro da esfera



A, B, C = vértices

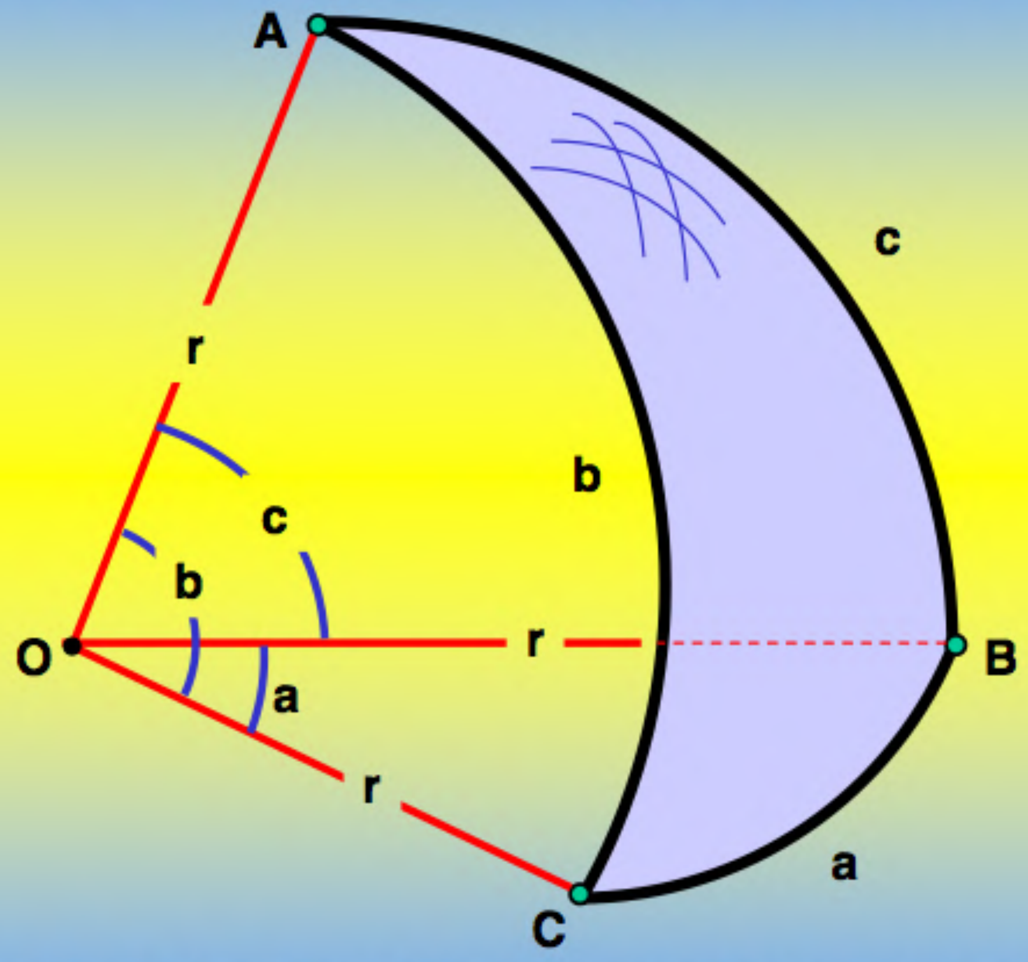
a,b,c = lados

Triângulo esférico



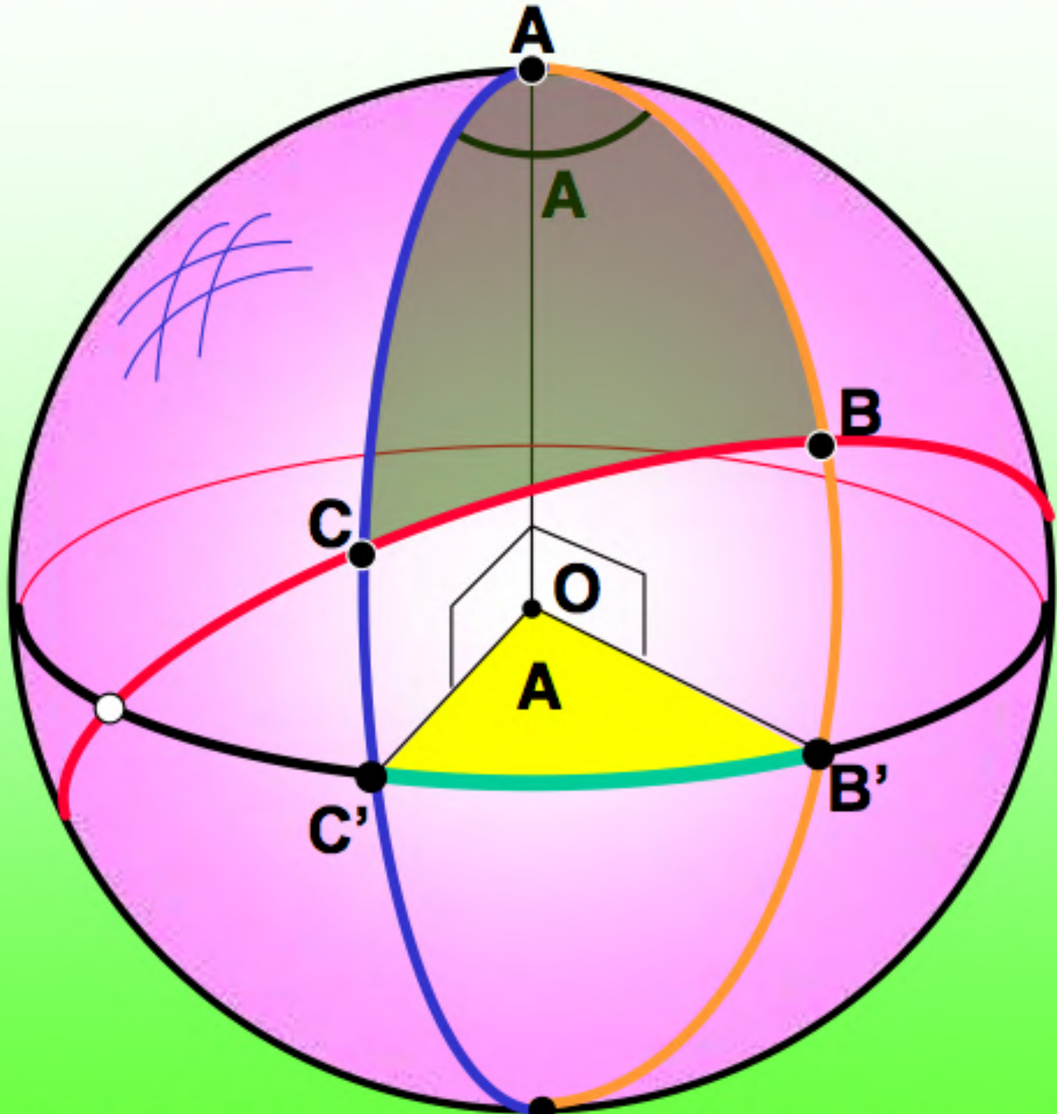
a , b , c : lados do triângulo esférico = medidas dos ângulos centrais

Lados do triângulo esférico



a , b , c : lados do triângulo esférico = medidas dos ângulos centrais

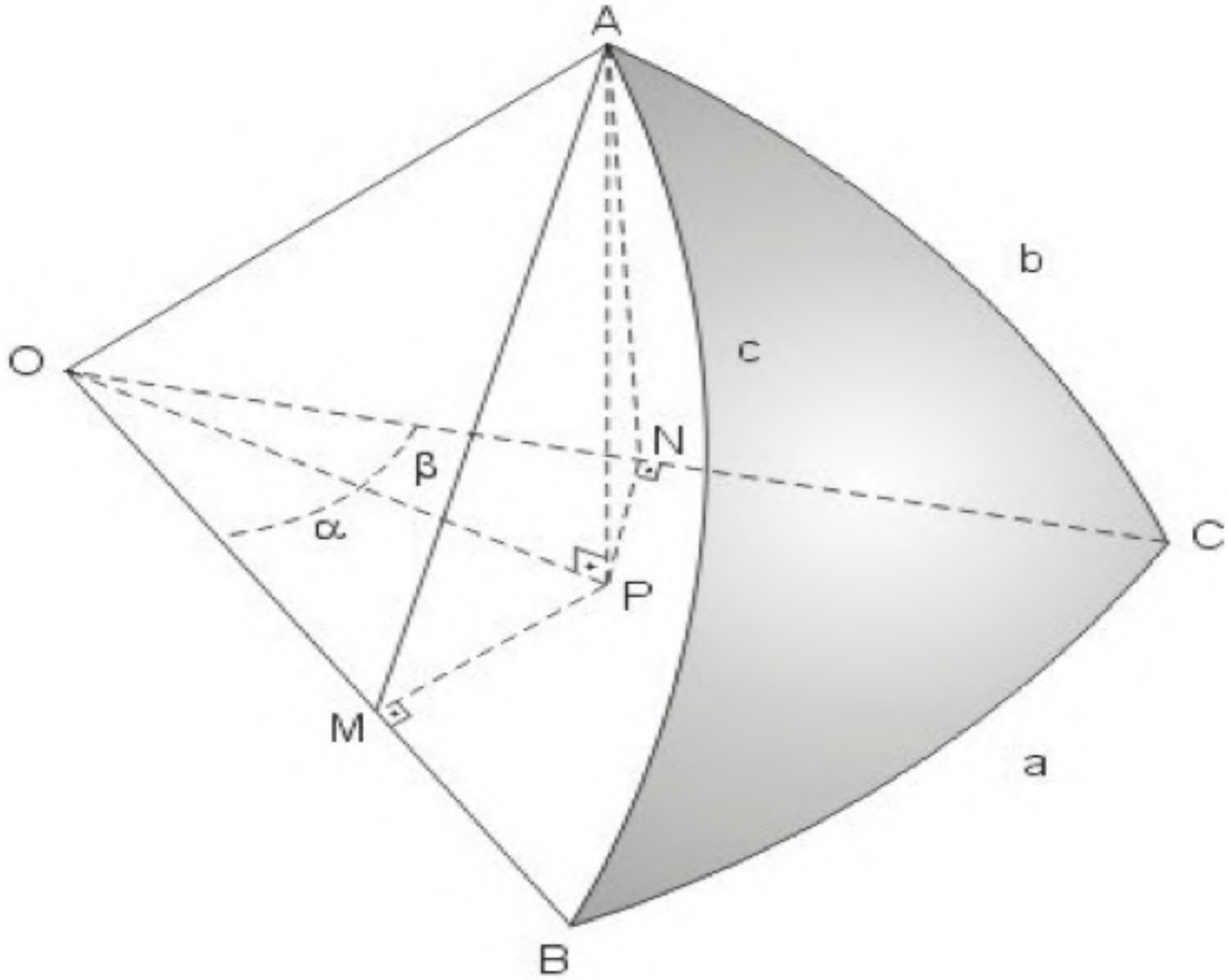
Ângulos do Triângulo Esférico



A,B,C = ângulos diedros = ângulos entre cada um dos pares de círculos

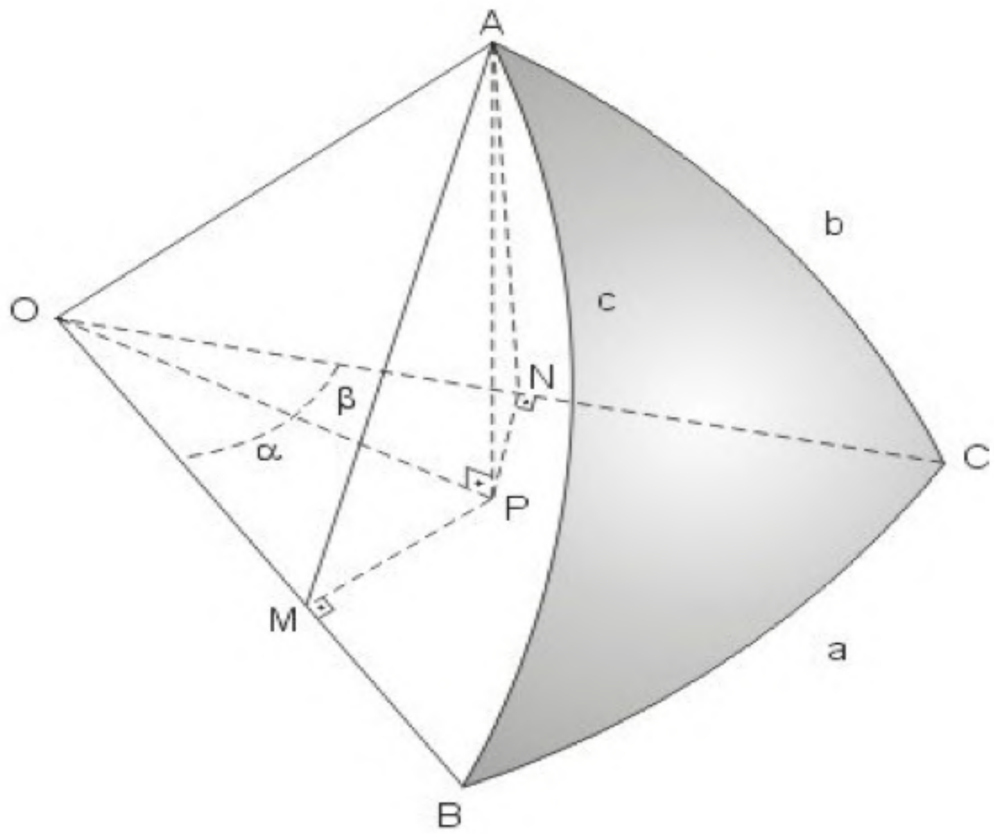
Elementos de um Triângulo Esférico

A,B,C = vértices
A,B,C = ângulos diedros
a,b,c = lados do triângulo


A
b
c
O
N
β
α
C
P
M
a
B

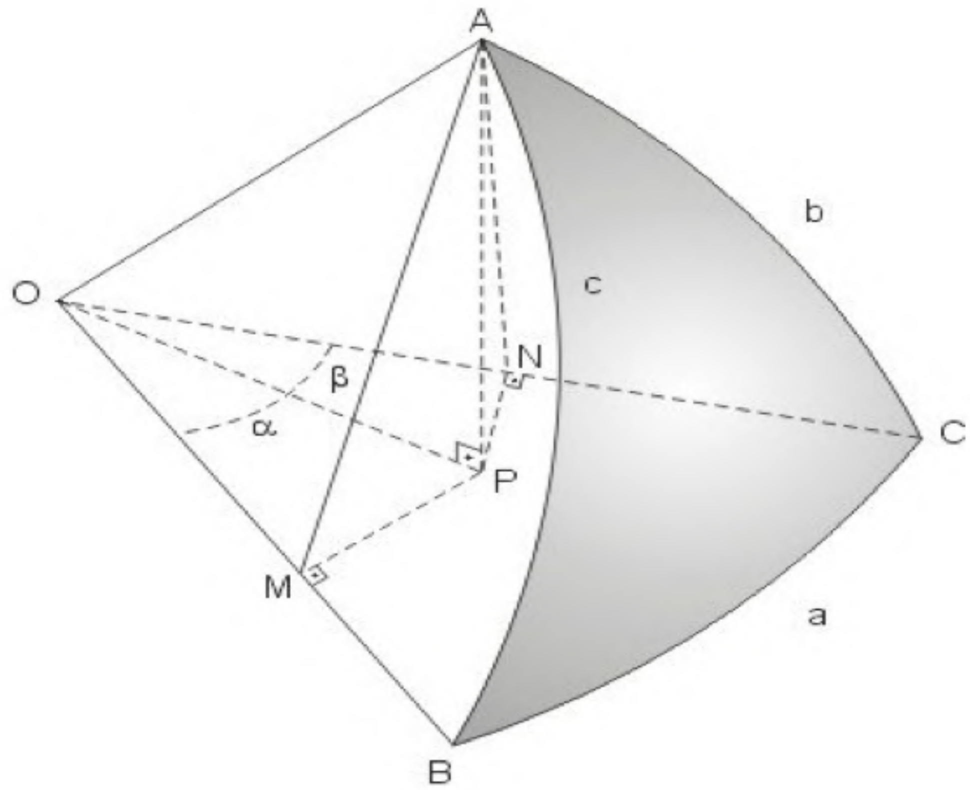
★ **Consideremos a perpendicular ao plano *OBC* e que passa pelo vértice em A do triângulo da figura.**

★ **Essa reta é representada pelo segmento AP da figura.**



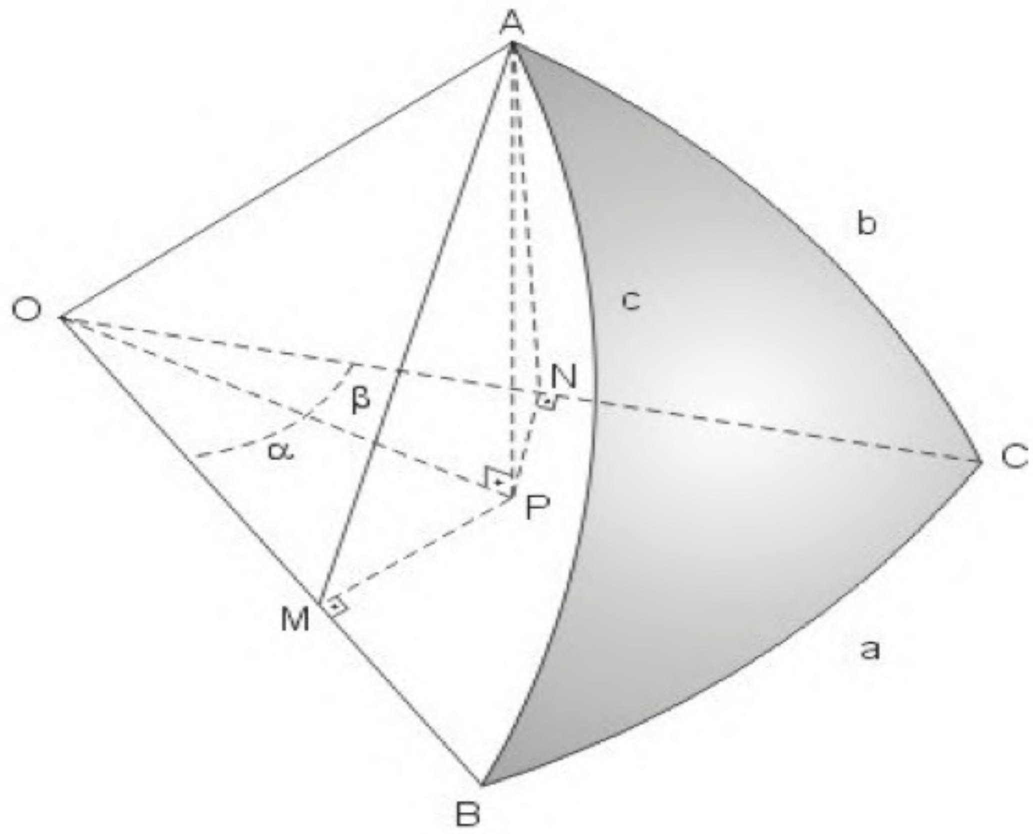
- A partir do ponto P, tomemos agora duas retas, PN e PM, perpendiculares, respectivamente, aos segmentos OB e OC.

- Ao tomarmos estas retas, formamos na figura vários triângulos (planos) retângulos: ANP, AMP, ONP, OMP e OAP.



★ **Além desses, são também triângulos retângulos OAN e OAM.**

★ **Usando todos estes triângulos poderemos então deduzir várias fórmulas.**



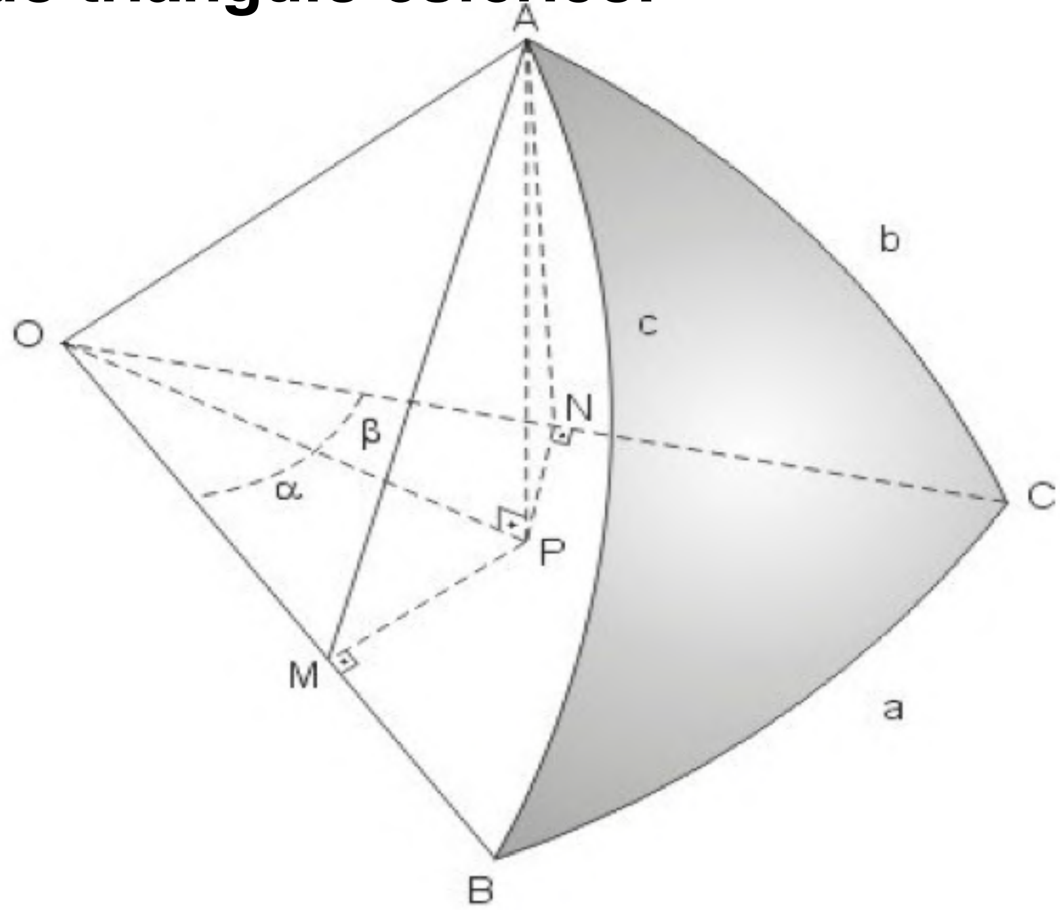
Considere o triângulo OAN

O ângulo com vértice em O deste triângulo mede a separação entre o cateto ON e a hipotenusa OA.

Este ângulo é o lado *b* do triângulo esférico.

cos(b) = *ON/OA*

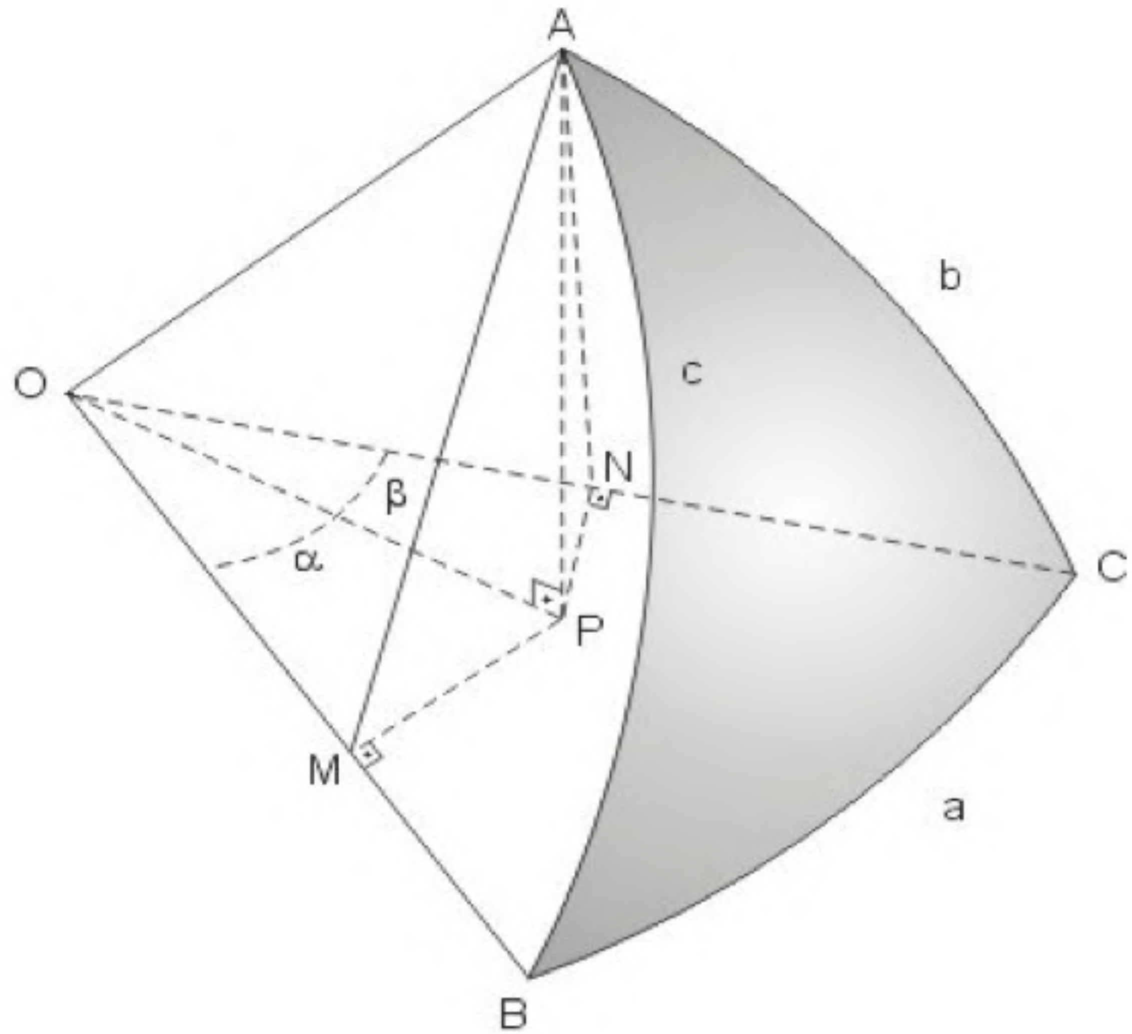
sen(b) = *AN/OA*



Analogamente, considerando o triângulo OAM, cuja hipotenusa é OA (o raio da esfera), teremos:

$\cos(c) = OM/OA$

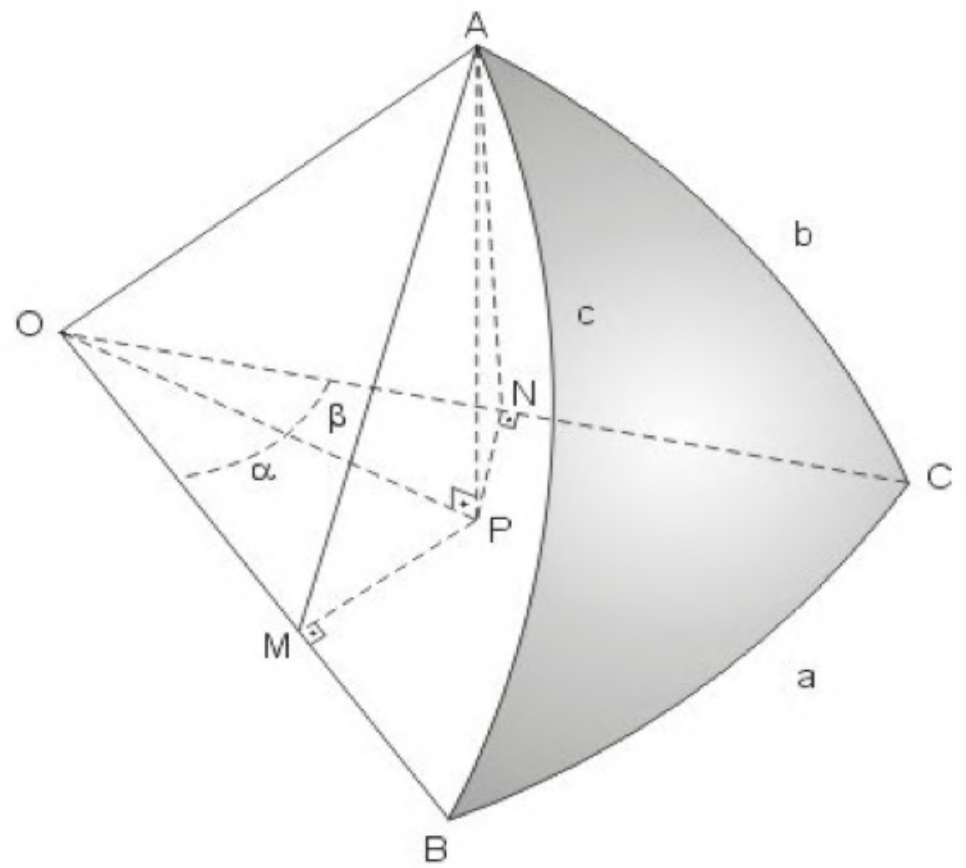
$\mathrm{sen}(c) = AM/OA$



Agora os triângulos ONP e OMP, cuja hipotenusa é OP.

Sejam novamente os ângulos com vértice em O, representados pelas letras gregas α e β.

Podemos escrever:



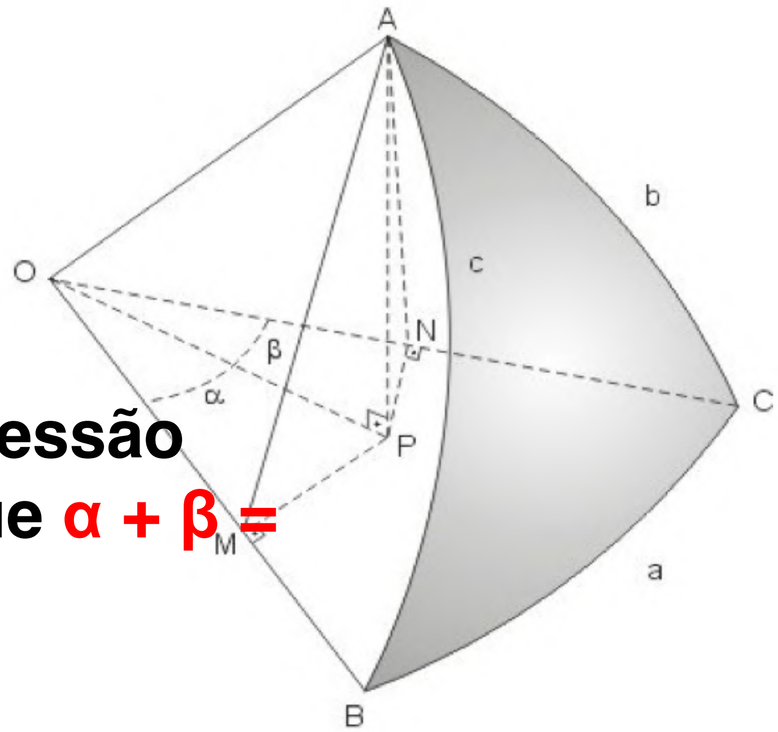
$\cos(\alpha) = OM/OP$

$\text{sen}(\alpha) = MP/OP$

$\cos(\beta) = ON/OP$

$\text{sen}(\beta) = NP/OP$

Podemos escrever:



$OM = OP \cos \alpha$

Substituindo esta relação na expressão para cos(*c*) acima e lembrando que $\alpha + \beta = a$, temos:

$OM = OA \cos(c) = OP \cos(a - \beta) =$
$= OP\,[\cos(a)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(\beta)]$

-> $OA \cos(c) = OP\,(\cos(a)\ ON/OP +$
$+\ \mathrm{sen}(a)\ NP/OP\,) =$
$= ON \cos(a) + NP\mathrm{sen}(a)$

-> $OA \cos(c) = OA \cos(b)\cos(a) + NP\ \mathrm{sen}(a)$

-> OA cos(c) = OA cos(b)cos(a) + +NP sen(a)

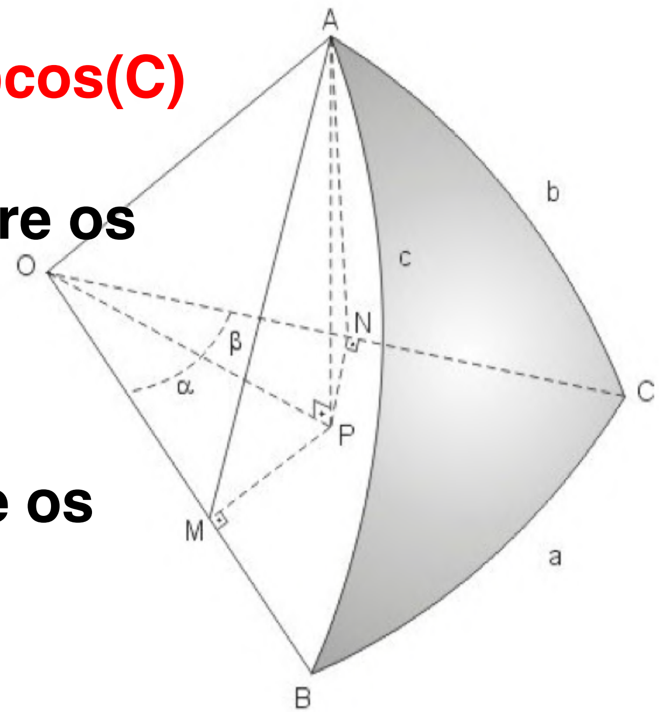
Esta linha acima resulta da expressão para ON usando o triângulo OAN, dada anteriormente. Precisamos agora encontrar uma expressão para NP.

Usando o triângulo ANP (retângulo em P e com hipotenusa AN), temos:

NP = AN cos(*N*ˆ) = AN cos(C)= OA sen(b)cos(C)

onde *N*ˆ é o ângulo com vértice em N, entre os segmentos AN e NP.

Mas este ângulo é igual ao ângulo C do triângulo esférico, ou seja, o ângulo entre os planos OAC e OBC.



(1) OA cos(c) = AO cos(b)cos(a) + NP sen(a)

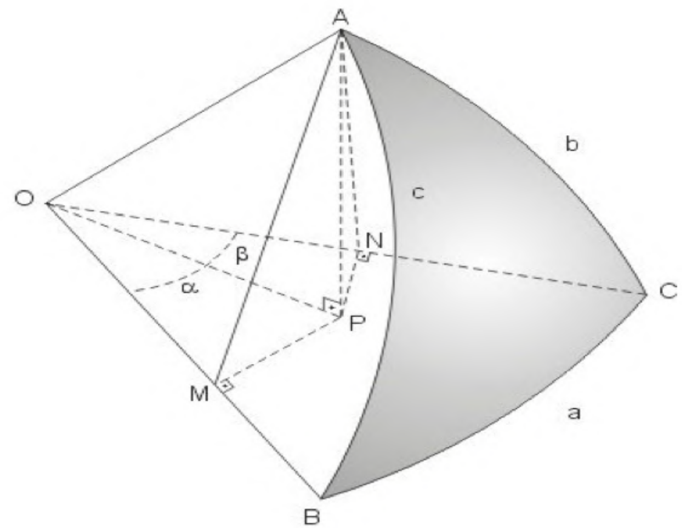
(2) NP = AN cos($\hat{N}$) = AN cos(C)= OA sen(b)cos(C)

(2) em (1):

OA cos(c) = AO cos(b)cos(a) + OA sen(b)cos(C)sen(a)

$$\cos(c) = \cos(b)\cos(a) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)\cos(C)$$

3 lados do triângulo esférico são associados a um de seus ângulos



- **Lei dos cossenos para os lados:**

  cos a = cos b cos c + sen b sen c cos A

  cos b = cos a cos c + sen a sen c cos B

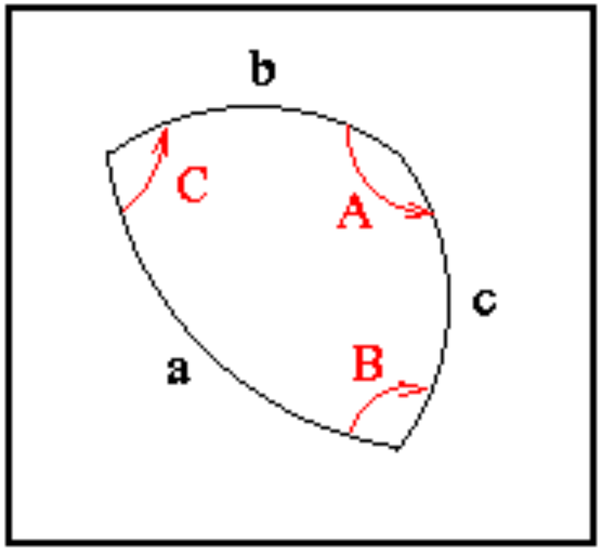
  cos c = cos a cos b + sen a sen b cos C

- **Lei dos cossenos para os ângulos:**

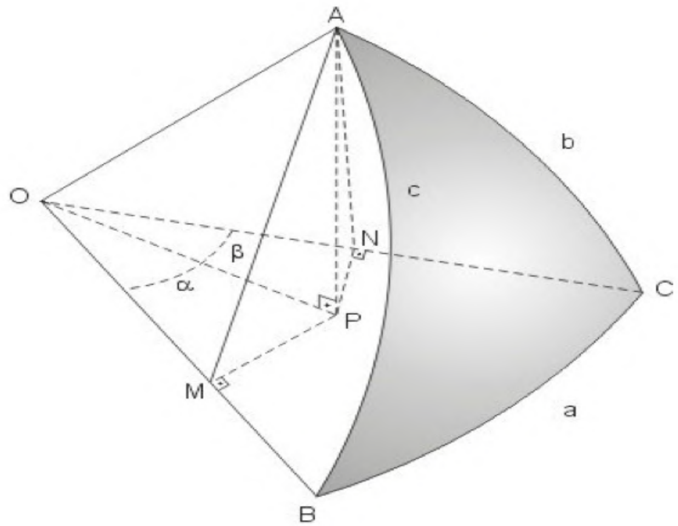
  cos A = - cos B cos C + sen B sen C cos a

  cos B = - cos A cos C + sen A sen C cos b

  cos C = - cos A cos B + sen A sen B cos c



Pelas fórmulas aplicadas aos triângulos OAN, OAM, ANP e AMP acima, podemos também deduzir a analogia dos senos.



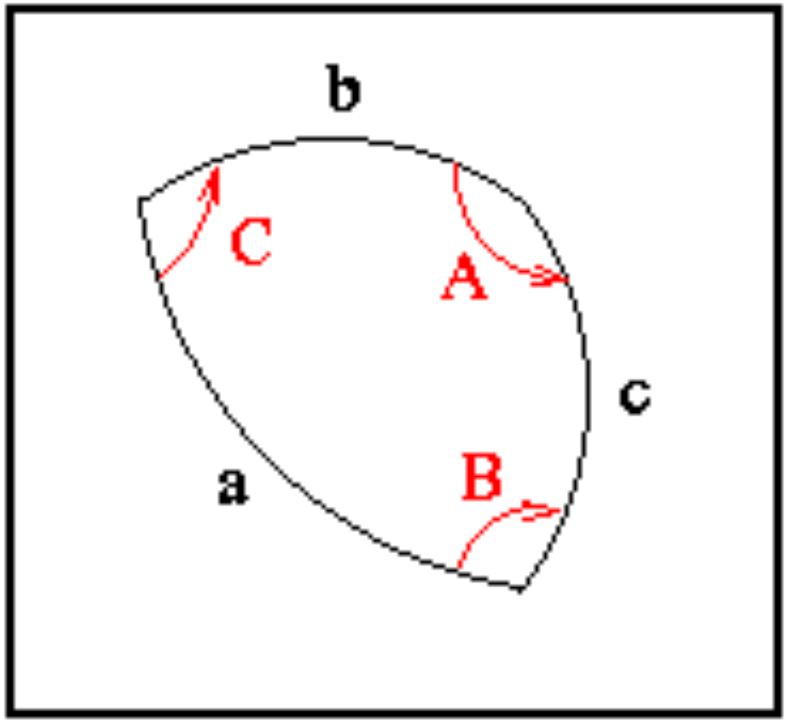
Logo:

$AM = OA\ \mathrm{sen}(c) = AP\ sen(B)$
$AN = OA\ \mathrm{sen}(b) = AP\ sen(C)$

$AP/OA = \mathrm{sen}(b)\mathrm{sen}(C) = \mathrm{sen}(c)\mathrm{sen}(B)$

$\to sen(b)/sen(B) = sen(c)/sen(C = sen(a)/sen(A)$

- **Lei dos senos:**
  sen a / sen A = sen b / sen B = sen c / sen C



Lei dos cossenos para os lados:

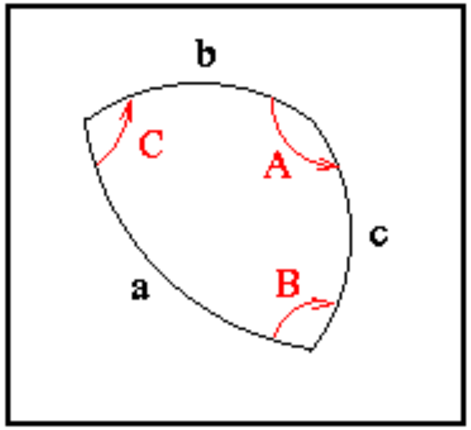
cos a = cos b cos c + sen b sen c cos A
cos b = cos a cos c + sen a sen c cos B
cos c = cos a cos b + sen a sen b cos C

Lei dos cossenos para os ângulos:

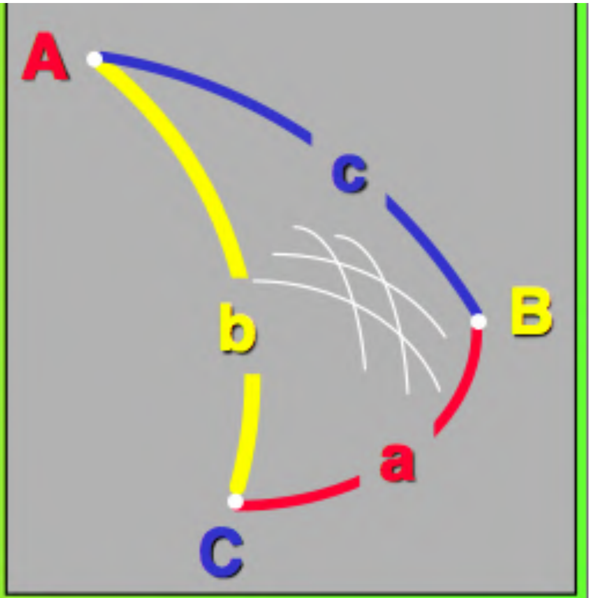
cos A = - cos B cos C + sen B sen C cos a
cos B = - cos A cos C + sen A sen C cos b
cos C = - cos A cos B + sen A sen B cos c

Lei dos senos:

sen a / sen A = sen b / sen B = sen c / sen C



Resumo das Fórmulas de Trigonometria Esférica



Co-seno

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \text{sen}\, b \cdot \text{sen}\, c \cdot \cos A$$

Seno

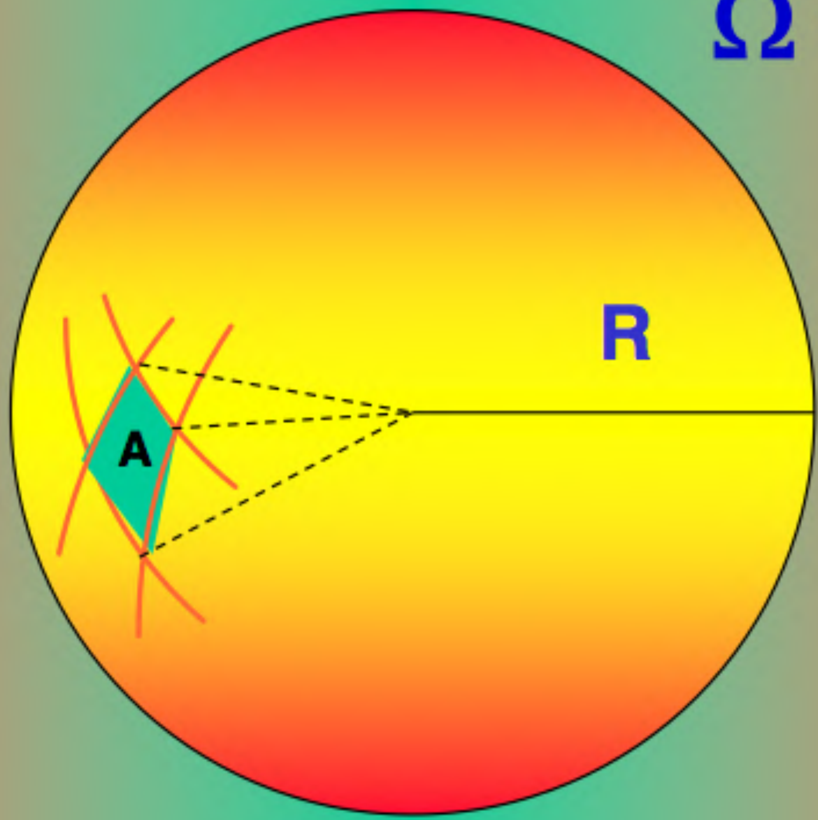
$$\frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, A} = \frac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, B} = \frac{\text{sen}\, c}{\text{sen}\, C}$$

Seno & Co-seno

$$\text{sen}\, a \cdot \cos B = \cos b \cdot \text{sen}\, c - \text{sen}\, b \cdot \cos c \cdot \cos A$$

Ângulo sólido

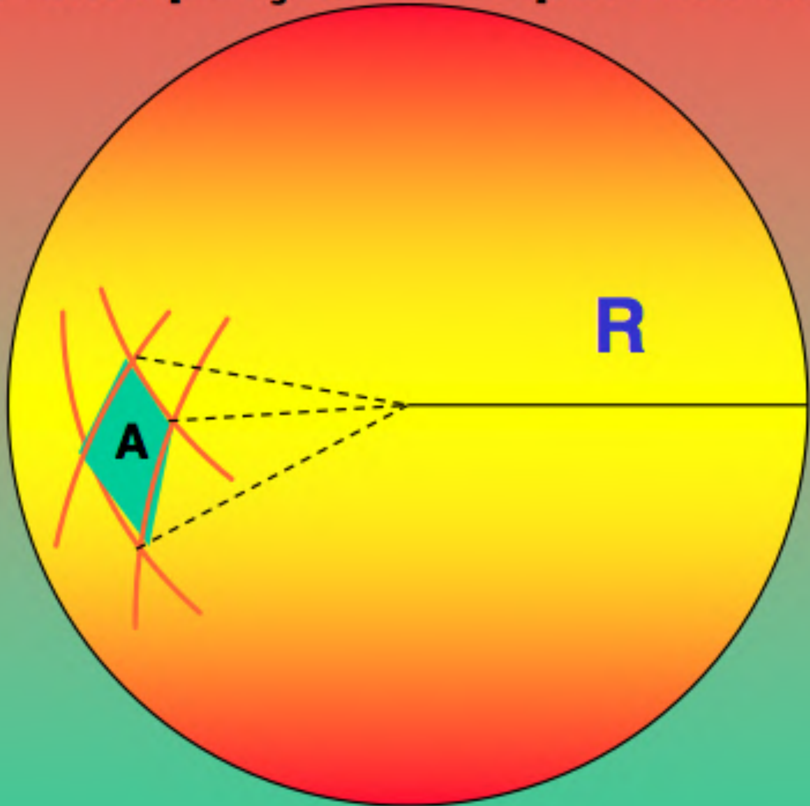
$$\Omega \equiv A / R^2$$



Esterorradiano

(esteradiano)

ângulo sólido subentendido no centro da esfera de raio *R* por uma porção de superfície de área R^2

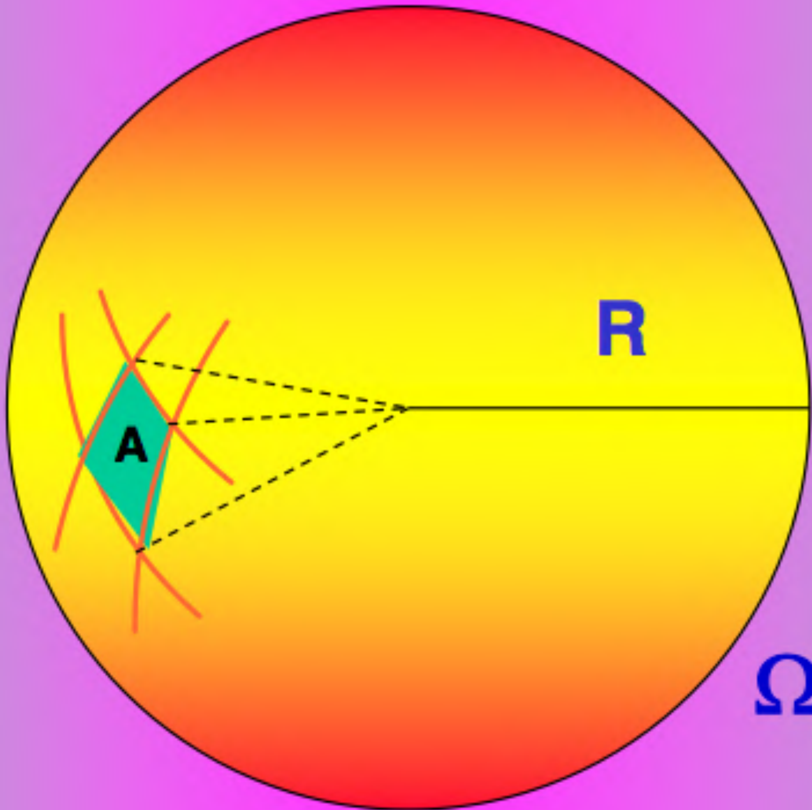


$$\Omega \equiv A / R^2$$

$$A \equiv R^2$$

$$\Omega \equiv 1 \text{ sr}$$

Ângulo sólido numa esfera completa

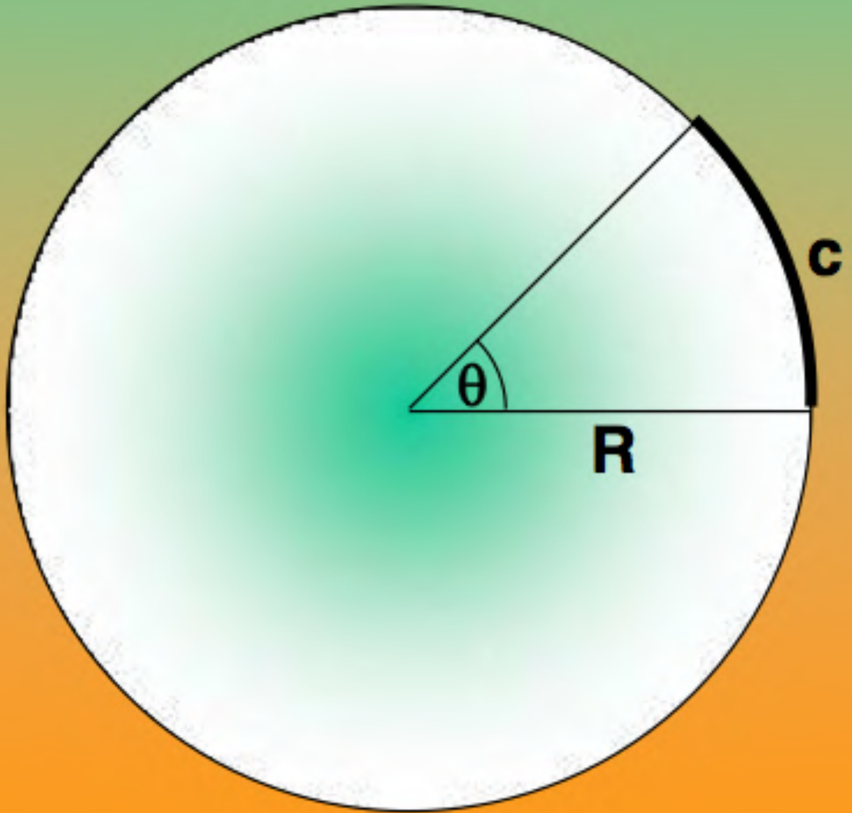


$$\Omega \equiv A / R^2$$

$$A_{esfera} \equiv 4\,\pi\,R^2$$

$$\Omega_{esfera} \equiv 4\,\pi \quad sr$$

Comprimento de um arco de circunferência



$$360^0 \Rightarrow 2\pi R$$
$$\theta \Rightarrow c$$

$$c = 2\pi R \;.\; \theta^0 / 360^0$$

$$c = R \;.\; \theta^0 \;.\; \pi / 180^0$$

Importante

1) Um triângulo esférico não é qualquer figura de três vértices desenhada sobre uma esfera;

2) Para ser um triângulo esférico esta figura tem que ter lados que sejam arcos de grande círculo;

3) Tanto os seus ângulos quanto os seus lados são medidos em unidades angulares;

4) Os lados de um triângulo esférico são arcos de círculo máximo que, divididos pelo raio da esfera nos dão o ângulo, com vértice no centro da esfera, entre os pontos que eles ligam.

5) Os ângulos em cada vértice do triângulo esférico representam a separação angular entre os planos dos grandes círculos que se interceptam naquele vértice.

Propriedades do triângulo esférico

1) A soma dos ângulos de um triângulo esférico é sempre maior que 180° e menor do que 540°;

2) A soma dos lados de um triângulo esférico é maior do que zero e menor do que 360°;

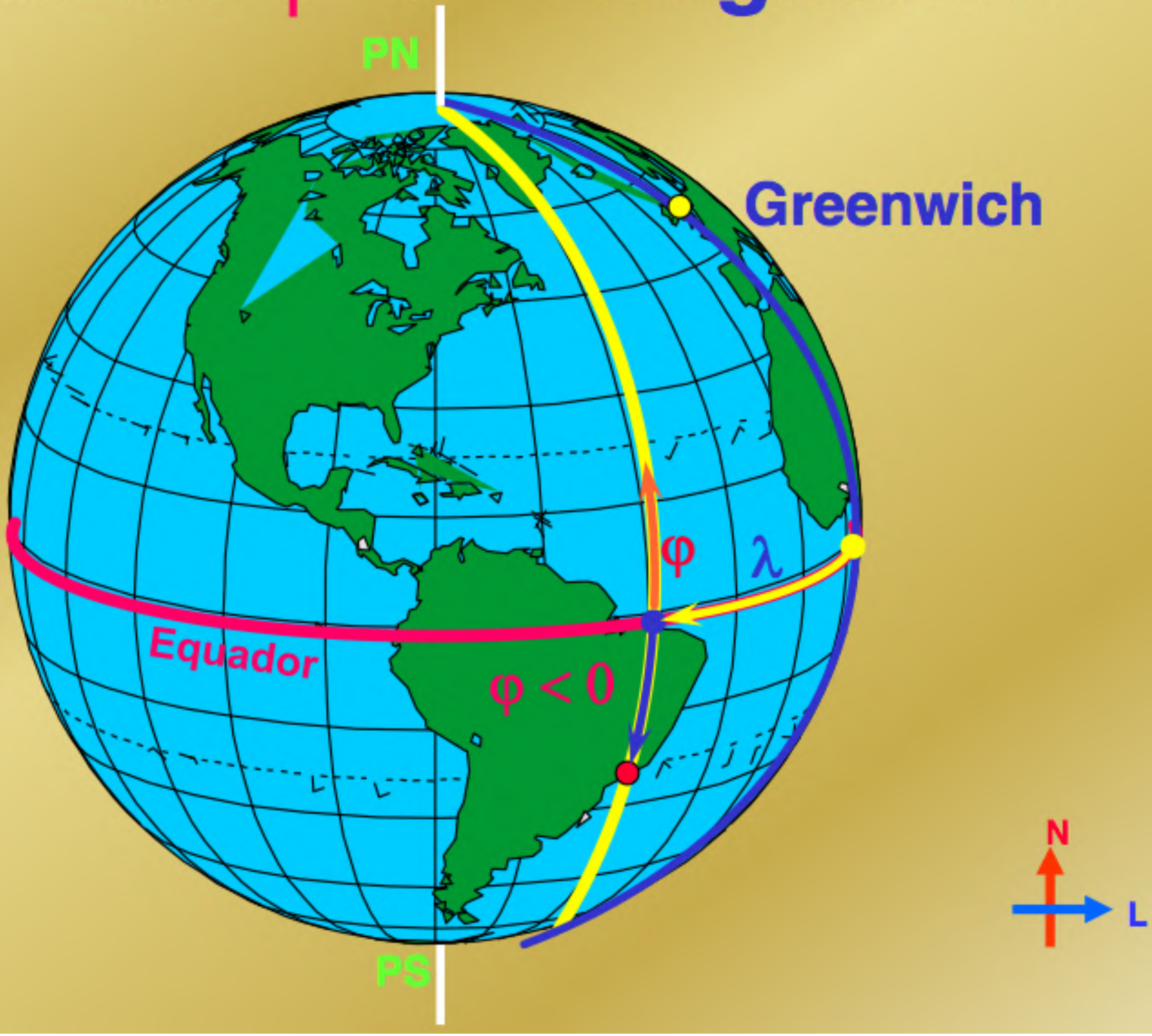
3) Os lados maiores estão opostos aos ângulos maiores no triângulo;

4) A soma de dois lados do triângulo é sempre maior do que o terceiro lado, e a diferença é sempre menor;

5) Cada um dos lados do triângulo é menor do que 180° e isso se aplica também aos ângulos.

Distância entre duas cidades

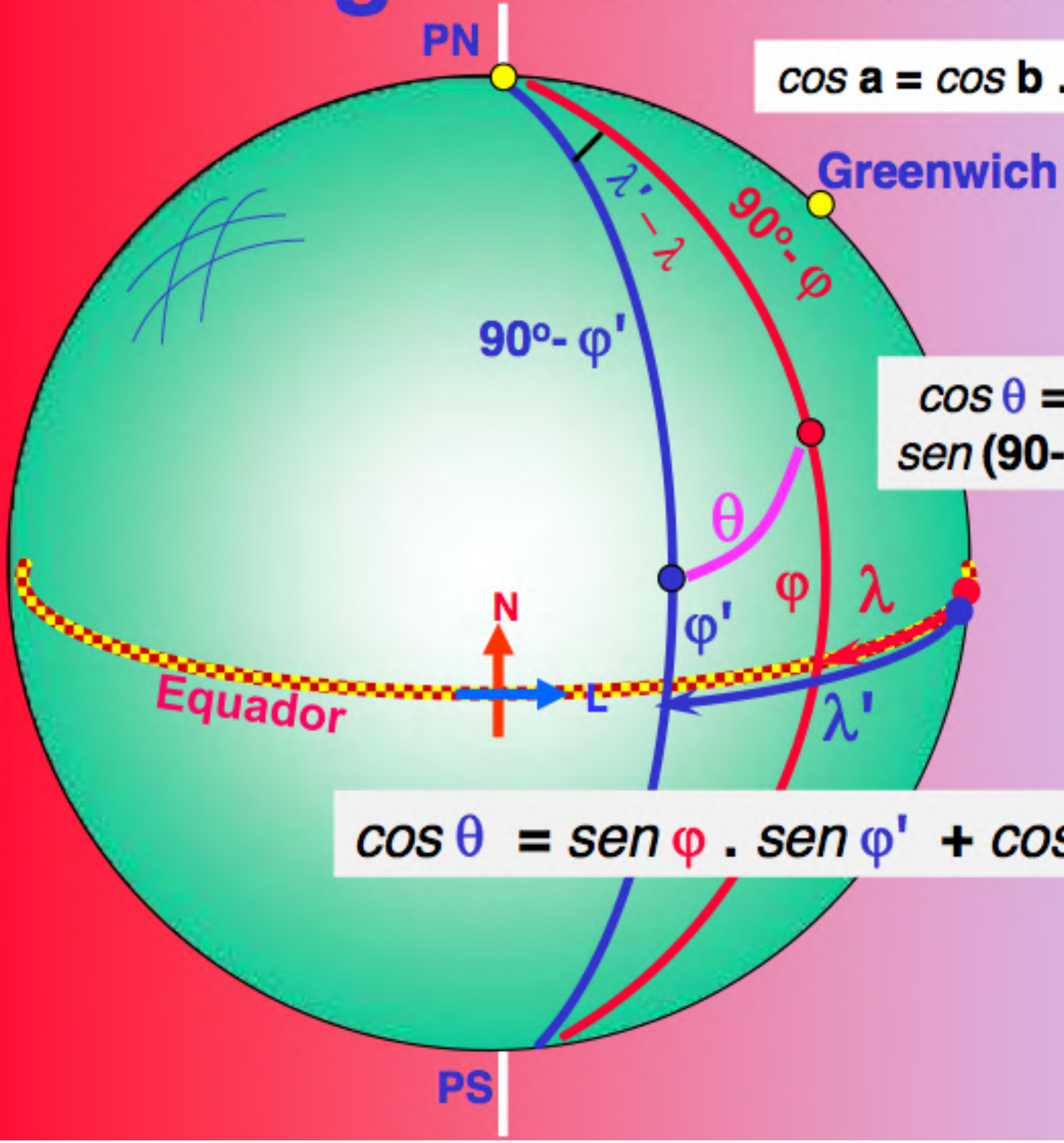
Latitude φ e Longitude λ



Ângulo entre duas cidades

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \cos A$$

Co-seno



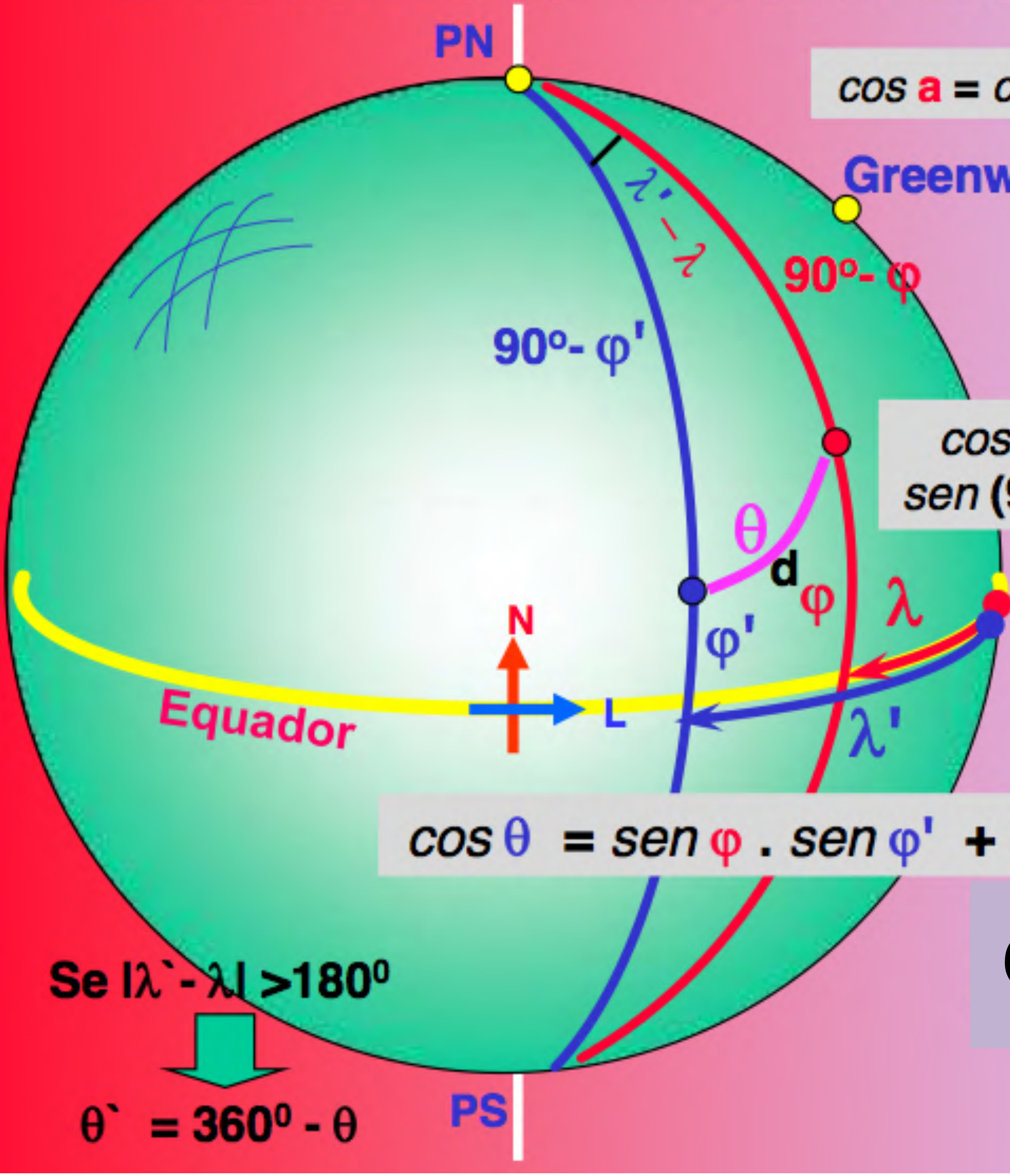
$$\cos\theta = \cos(90-\varphi)\,.\,\cos(90-\varphi') + \operatorname{sen}(90-\varphi)\,.\,\operatorname{sen}(90-\varphi')\,.\,\cos(\lambda'-\lambda)$$

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\varphi \,.\, \operatorname{sen}\varphi' + \cos\varphi \,.\, \cos\varphi' \,.\, \cos(\lambda'-\lambda)$$

Distância entre duas cidades

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A$$

Co-seno



$$\cos\theta = \cos(90-\varphi) \cdot \cos(90-\varphi') + \operatorname{sen}(90-\varphi) \cdot \operatorname{sen}(90-\varphi') \cdot \cos(\lambda' - \lambda)$$

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi' + \cos\varphi \cdot \cos\varphi' \cdot \cos(\lambda' - \lambda)$$

distância “d”

Se $|\lambda` - \lambda| > 180^0$

$\theta` = 360^0 - \theta$