CET164

Física I

Prof. Rogério Monteiro

Rotações e momento angular

Aula A10

Tópicos da aula

- Corpos rígidos.
- Representação vetorial.
- Torque.
- Momento angular.

Referências

- Curso de Física Básica. Volume 1: Mecânica. H. Moysés Nussenzveig. Editora Edgard Blucher. 2002.

- Fundamentos de Física. Volume 1: Mecânica. Halliday, Resnick & Walker. 8a edição. Editora LTC. 2009.

- Física para cientista e engenheiros. Volume 1: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica. Paul A. Tipler & Gene Mosca. 6a edição. Editora LTC. 2009.

Objetivos

Ao final da aula, você deverá ser capaz de:

- Correlacionar grandezas lineareas e grandezas angulares.
- Resolver problemas envolvendo rotações de corpos rígidos.
- Entender o motivo da conservação do momento angular.

Corpos rígidos

Corpos rígidos

- Um corpo rígido corresponde a um conceito limite ideal, de um corpo indeformável quaisquer que sejam as forças a ele aplicadas: um corpo é rígido quando a distância entre duas partículas quaisquer do corpo é invariável.

- Nenhum corpo é perfeitamente rígido: uma barra de aço se deforma sob a ação de forças suficientemente intensas e duas bolas de bilhar que colidem deformam-se ao entrar em contato.

- Entretanto, as deformações são em geral suficientemente pequenas para que possam ser despreza das em primeira aproximação.

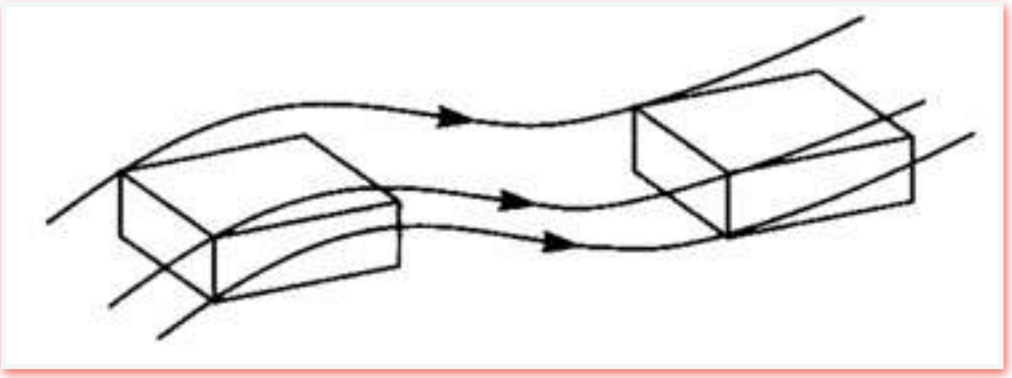
Corpos rígidos: translação

- Diz-se que um corpo rígido tem um movimento de **translação** quando a direção de qualquer segmento que une dois de seus pontos não se altera durante o movimento.

- Todos os pontos sofrem o mesmo deslocamento durante o mesmo intervalo de tempo, de modo que todos têm, em qualquer instante, a mesma velocidade e aceleração, que se chamam, respectivamente, velocidade e aceleração de translação do corpo rígido.

- Assim, usualmente estudamos seu movimento a partir do centro de massa.

Corpos rígidos: translação

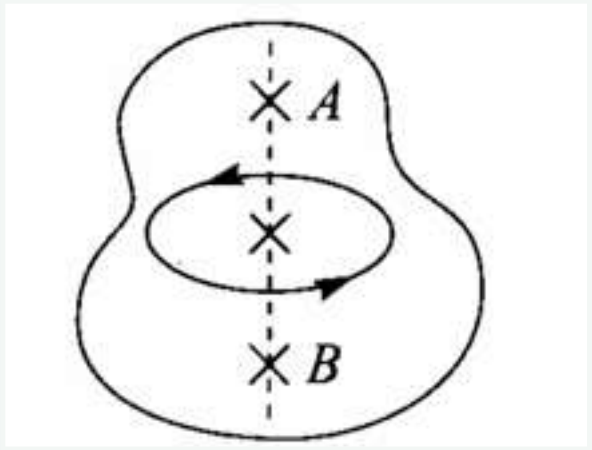


exemplo de translação de um corpo rígido

Corpos rígidos: rotação

- Se fixamos dois pontos A e B de um corpo rígido, isto equivale a fixar todos os pontos da reta definida por AB, pois todos eles têm de manter inalteradas suas distâncias de A e de B.

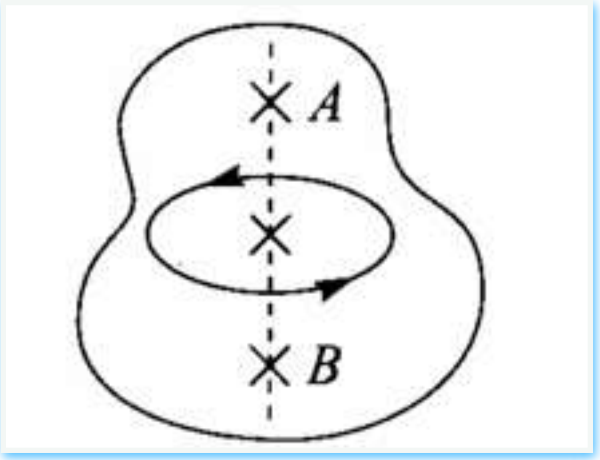
- Qualquer partícula do corpo situada fora desta reta tem de manter invariável sua distância ao eixo AB, de modo que só pode descrever um círculo, com centro nesse eixo.



AB é um **eixo de rotação**: todas as partículas descrevem círculos com centro no eixo, e giram de um mesmo ângulo no mesmo intervalo de tempo.

Corpos rígidos: rotação

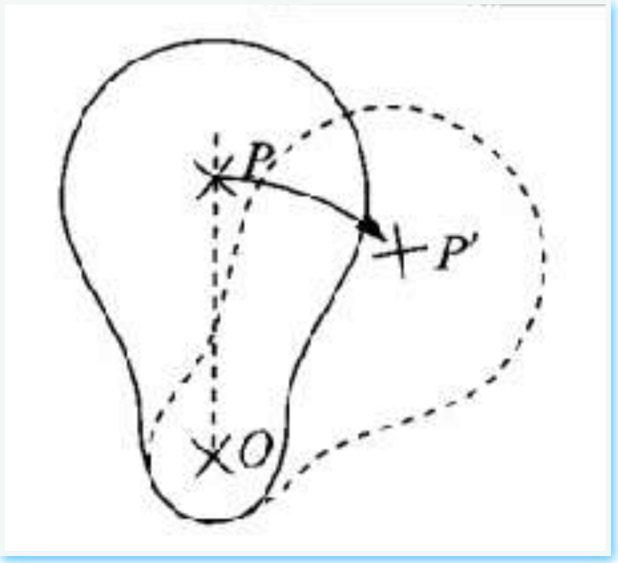
- O estudo do movimento reduz-se neste caso ao estudo do movimento circular de qualquer partícula situada fora do eixo: temos uma **rotação em torno de um eixo fixo**, que pode ser descrita em termos de uma única coordenada, o **ângulo de rotação**.



Corpos rígidos: rotação

- Se fixarmos um único ponto O do corpo, qualquer outro ponto P situado a uma distância *r* de O tem de mover-se sobre uma esfera de raio *r* com centro em O.

- Temos uma **rotação em tomo de um ponto fixo**, e o deslocamento de um ponto como P sobre a esfera pode ser descrito por duas coordenadas: por exemplo, os ângulos de latitude e longitude.



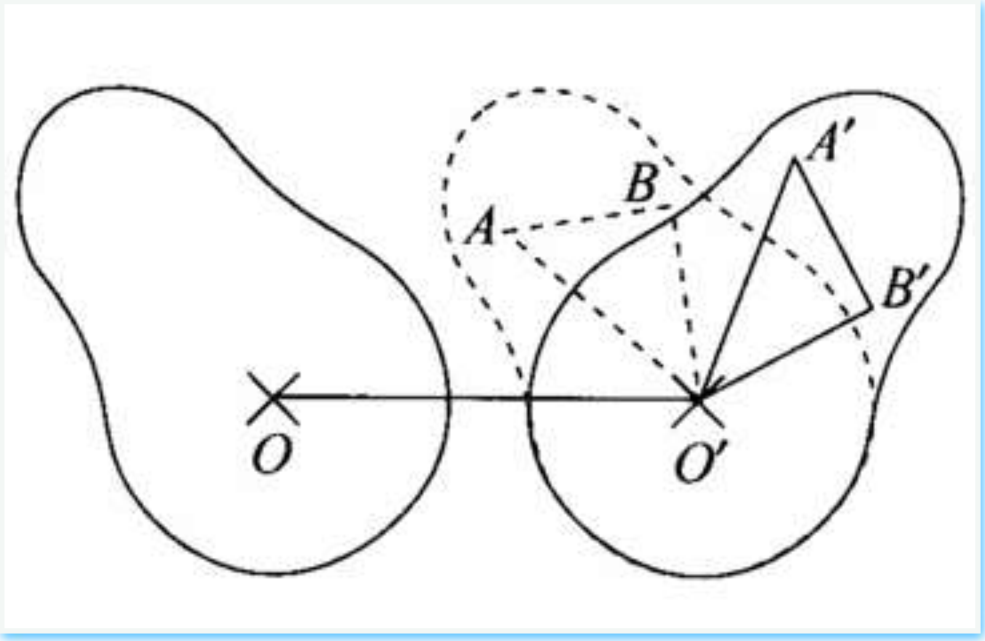
Corpos rígidos: rotação

- Fixando-se a posição de 3 pontos A, B e C não colineares, fica fixada a posição do corpo rígido.
- Veja: ao fixarmos A e B, fica fixado eixo AB. O ponto C não colinear só poderia descrever um círculo em torno de AB.
- Logo, fixando C, fixa-se o corpo rígido.

Corpos rígidos: rotação

Teorema de Chasles (1830)

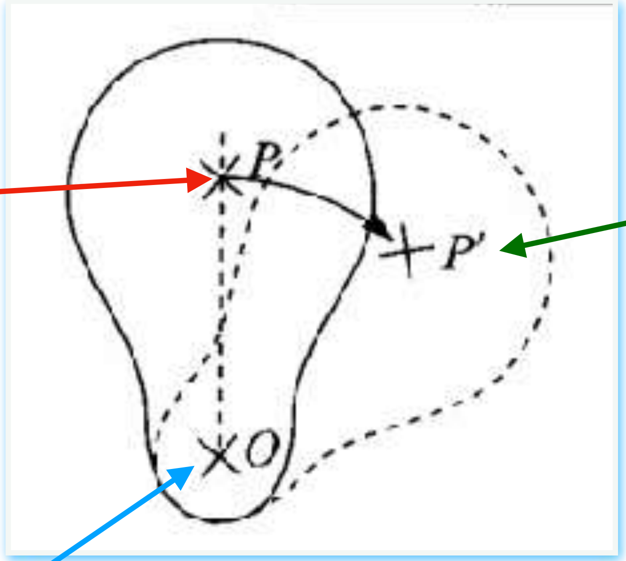
O movimento mais geral de um corpo rígido se compõe de uma translação e uma rotação



Corpos rígidos: rotação

- Quantos parâmetros é preciso dar para especificar completamente a posição de um corpo rígido em relação a um dado referencial?

posição de P: 2 coordenadas
(latitude e longitude)



posição de P': 1 coordenada
(ângulo de rotação)

posição de O: 3 coordenadas
(*x*, *y*, *z*)

Precisamos de 3 + 2 +1 coordenadas para especificar completamente a posição de um corpo rígido

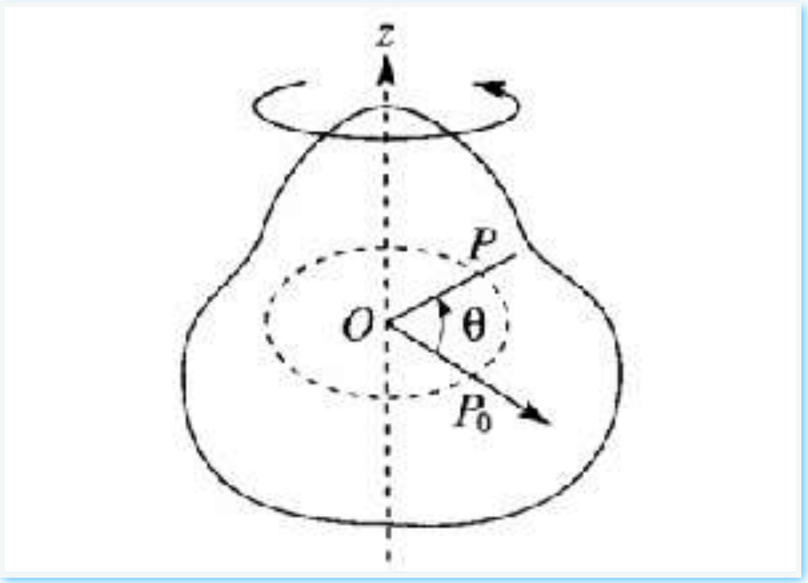
Dizemos que um corpo rígido tem **6 graus de liberdade.**

Representação vetorial

Representação vetorial

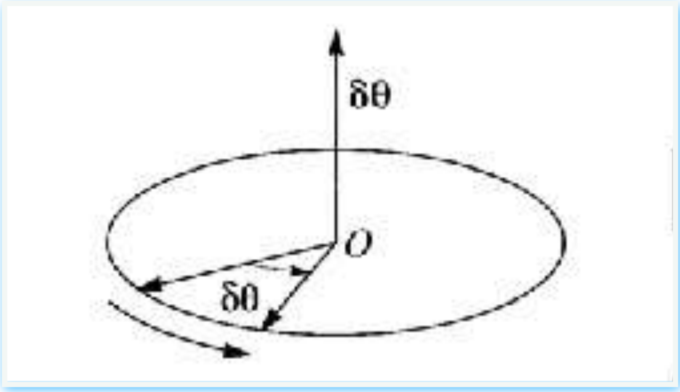
- Movimento mais simples: rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo (Oz).

- Há 1 grau de liberdade.

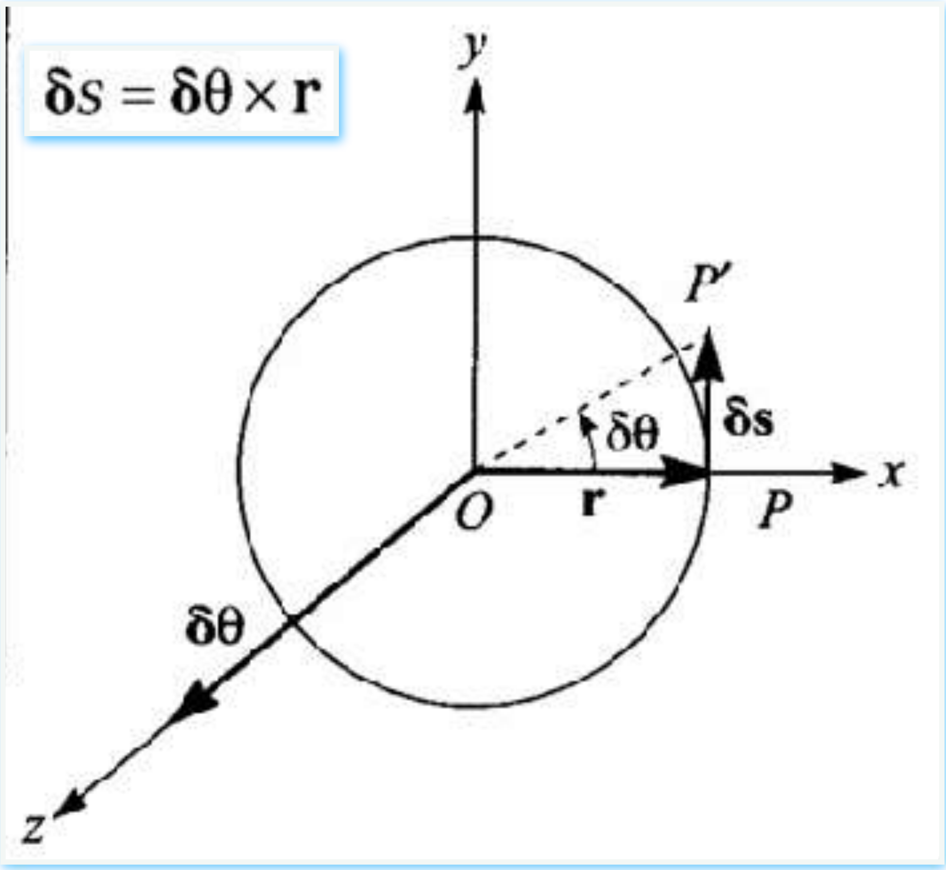


Representação vetorial

- Para rotações infinitesimais, podemos associar um vetor $\overrightarrow{\theta}$ a uma rotação pelo ângulo θ, com a direção do vetor sendo dada pela direção do eixo de rotação.



orientação do vetor: regra da mão direita.



Representação vetorial

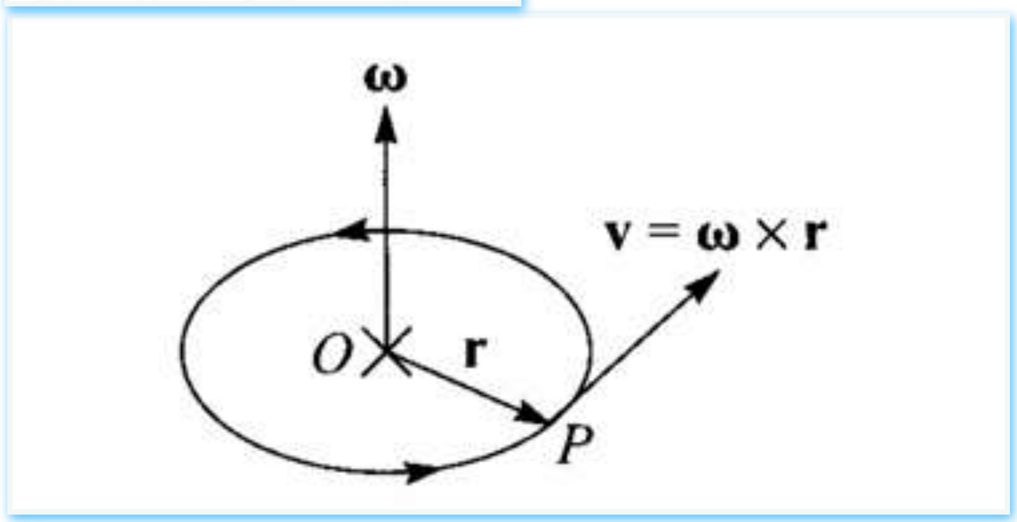
$$\mathbf{v} = \lim_{\delta t \to 0}\left(\frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t}\right) = \lim_{\delta t \to 0}\left(\frac{\delta \theta}{\delta t}\right) \times \mathbf{r}$$

vetor velocidade instantânea

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\delta t \to 0}\left(\frac{\delta \theta}{\delta t}\right) = \frac{d\theta}{dt}$$

vetor velocidade angular

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r} / dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



Representação vetorial

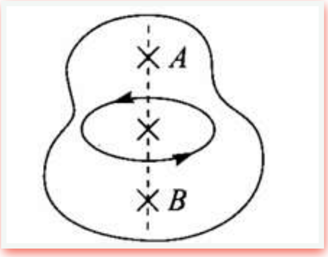
- Vimos anteriormente que o deslocamento mais geral possível de um corpo rígido se compõe de uma translação e de uma rotação.

- Assim, podemos decompor a velocidade de uma partícula arbitrária do corpo num dado instante em dois termos: uma velocidade instantânea de translação e uma velocidade instantânea de rotação:

$$\mathbf{V} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Torque

Torque



- Consideremos o problema do movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo (1 grau de liberdade, θ).

- Podemos fazer a seguinte analogia entre grandezas lineares e angulares:

grandezas lineares		grandezas angulares	
deslocamento linear	x	ângulo de rotação	θ
velocidade linear	$v = \dfrac{dx}{dt}$	velocidade angular	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
velocidade linear	$a = \dfrac{dv}{dt}$	aceleração angular	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

Torque

- E como fica a dinâmica das rotações?
- Qual grandeza análoga à força?

trabalho em grandezas lineares	trabalho em grandezas angulares
$\Delta W = F\Delta x$	$\Delta W = \tau\Delta\theta$

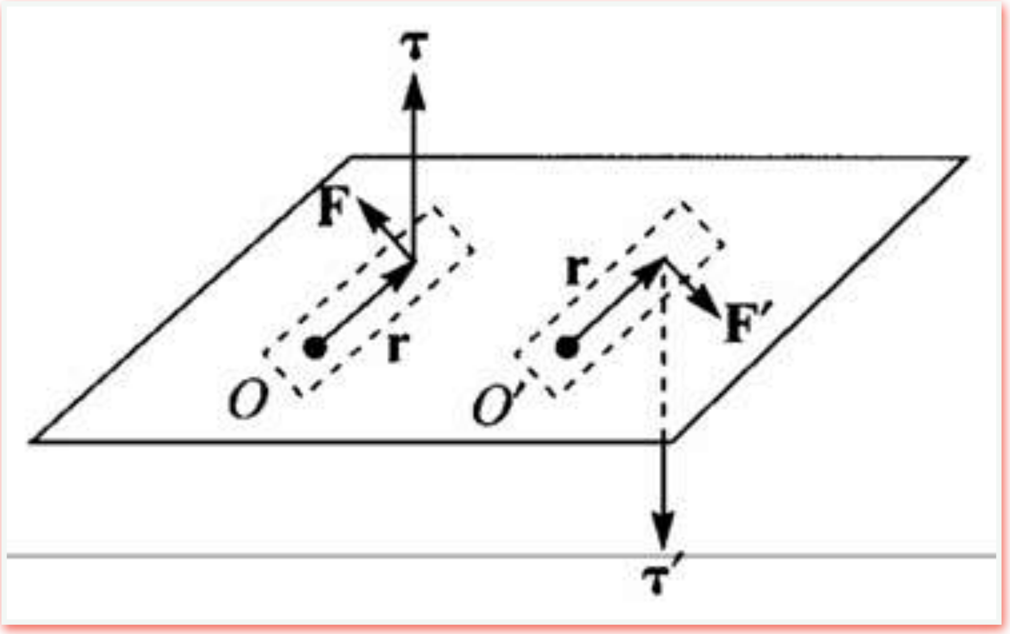
- O que é τ?

Torque

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$1\mathrm{N} \times 1\mathrm{m}$$

torque da força **F** em relação ao ponto **O**



o vetor torque

Momento angular

Momento angular

- Além da força **F** outro conceito fundamental na dinâmica de uma partícula é o do momento linear **p** relacionado com **F** pela 2a. lei de Newton:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Assim como o torque está para a força, haveria algum análogo para o momento linear?

- Vamos considerar a rotação de uma partícula P em torno de um ponto O.

Momento angular

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boxed{\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}}$$

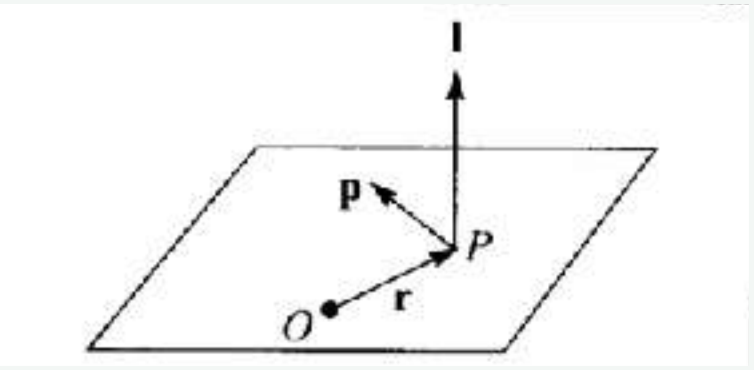
$$\mathbf{v} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) = 0$$

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{\substack{=\mathbf{v} \\ \text{(velocidade)}}} \times \mathbf{p} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

momento angular da partícula em relação ao ponto O



Momento angular

grandezas lineares		grandezas angulares	
força	$\overrightarrow{F} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{p}$	torque	$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{l}$
momento linear	$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$	momento angular	$\vec{l} = \vec{r} \times \overrightarrow{p}$

Momento angular

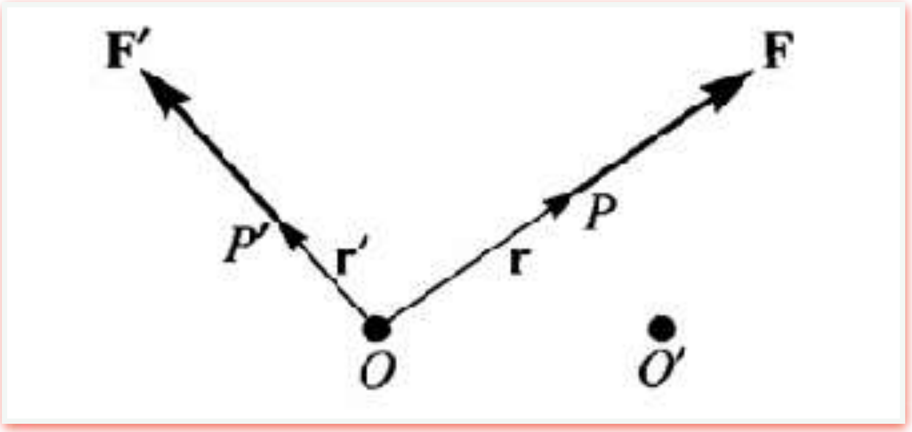
$$\boldsymbol{\tau} = 0 \Rightarrow \mathbf{l} = \text{ constante}$$

Lei de conservação do momento angular de uma partícula:
se o torque sobre uma partícula em relação a um ponto se anula, o momento angular da partícula em relação a esse ponto se conserva.

Momento angular

- Exemplo: forças centrais.

- Para uma partícula sujeita a forças centrais, o torque em relação ao centro de forças O é identicamente nulo.



$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

- Por consequência, **o momento angular de uma partícula sujeita a forças centrais em relação ao centro de forças se conserva.**

Momento angular

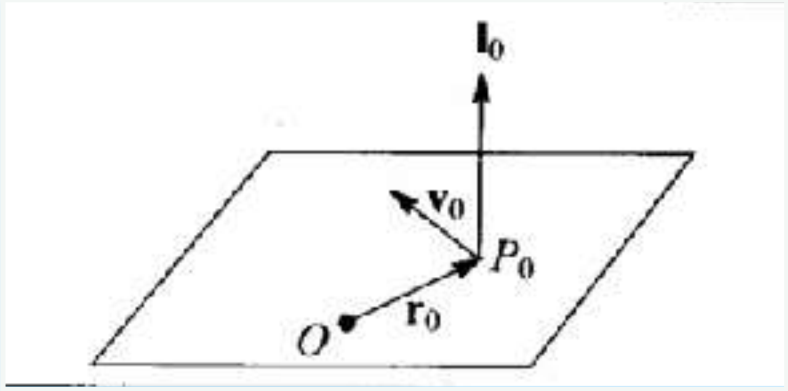
- Exemplo: forças centrais.
- É conveniente exprimir o momento angular em termos da velocidade angular ω da partícula. Como $v = \omega r$ temos:

$$l = mvr = mr^2\omega = I\omega$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad \left\{ \boxed{T = \frac{1}{2}I\omega^2} \right.$$

$$I = mr^2$$

momento de inércia da partícula em relação a O



Momento angular de um sistema de partículas

- Consideremos agora um sistema formado por um número qualquer N de partículas, e seja m_i a massa da partícula i (i = 1, 2, …, N), de vetor de posição $\boldsymbol{r}_i(t)$ e velocidade $\boldsymbol{v}_i(t)$ em relação a uma dada origem O no instante t.

- O momento angular total do sistema em relação a O se escreve:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

Momento angular de um sistema de partículas

- Podemos também escrever:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{R} \times \mathbf{P}$$

momento angular do CM em relação a O

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$$

momento angular total do sistema em relação ao CM

se o sistema como um todo está em repouso (**P** = 0), **L** não depende da origem

Lei fundamental da dinâmica das rotações

- A relação $\vec{\tau} = d\vec{l}/dt$ é conhecida como a segunda lei de Newton para rotações de uma partícula.

- Vamos agora generalizar para um sistema de partículas.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(\text{ext})} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}^{(\text{ext})}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_i^{(\text{ext})} = \boldsymbol{\tau}^{(\text{ext})}$$

Lei fundamental da dinâmica das rotações para um sistema de partículas: a taxa de variação com o tempo do momento angular total do sistema em relação a um ponto O (num referencial inercial) é igual à resultante de todos os torques externos em relação a O que atuam sobre o sistema.

Alguns exemplos

Introdução

- Um CD gira, do repouso a até 500 rev/min, em 5.5 s.
    - (*a*) Qual é sua aceleração angular suposta constante?
    - (*b*) Quantas voltas o disco dá em 5.5 s?
    - (*c*) Qual é a distância percorrida por um ponto da borda do disco, a 6.0 cm do centro, durante esses 5.5 s?

Introdução

- Resolução:

- Um CD gira, do repouso a até 500 rev/min, em 5.5 s.
  - (a) Qual é sua aceleração angular suposta constante?
  - (b) Quantas voltas o disco dá em 5.5 s?
  - (c) Qual é a distância percorrida por um ponto da borda do disco, a 6.0 cm do centro, durante esses 5.5 s?

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{500\,\text{rev/min}}{5{,}5\,\text{s}} \times \frac{2\pi\,\text{rad}}{1\,\text{rev}} \times \frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}} = 9{,}52\,\text{rad/s}^2 = \boxed{9{,}5\,\text{rad/s}^2}$$

a)

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \tfrac{1}{2}(9{,}52\,\text{rad/s}^2)(5{,}5\,\text{s})^2 = 144\,\text{rad}$$

$$144\,\text{rad} \times \frac{1\,\text{rev}}{2\pi\,\text{rad}} = 22{,}9\,\text{rev} = \boxed{23\,\text{rev}}$$

b)

$$\Delta s = r\Delta\theta = (6{,}0\,\text{cm})(144\,\text{rad}) = 8{,}65\,\text{m} = \boxed{8{,}7\,\text{m}}$$

c)

Torque

- Para exercitar-se sem sair do lugar, você montou sua bicicleta sobre um suporte, de forma que a roda traseira ficou livre para girar. Enquanto você pedala, a corrente exerce uma força de 18 N sobre a catraca traseira, a uma distância r_c = 7.0 cm do eixo de rotação da roda. Considere a roda como um aro ($I = MR^2$) de raio R = 35 cm e massa M = 2.4 kg. Qual é a velocidade angular da roda 5.0 s depois?

Torque

- Resolução:

- Para exercitar-se sem sair do lugar, você montou sua bicicleta sobre um suporte, de forma que a roda traseira ficou livre para girar. Enquanto você pedala, a corrente exerce uma força de 18 N sobre a catraca traseira, a uma distância r_c = 7.0 cm do eixo de rotação da roda. Considere a roda como um aro ($I = MR^2$) de raio R = 35 cm e massa M = 2.4 kg. Qual é a velocidade angular da roda 5.0 s depois?

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t$$

$$\tau_{res} = I\alpha$$

$$\tau_{res} = Fr_c$$

$$\alpha = \frac{\tau_{res}}{I} = \frac{Fr_c}{MR^2}$$

$$\omega = \alpha t = \frac{Fr_c}{MR^2}t = \frac{(18\,\text{N})(0{,}070\,\text{m})}{(2{,}4\,\text{kg})(0{,}35\,\text{m})^2}5{,}0\,\text{s} = 21{,}4\,\text{rad/s} = \boxed{21\,\text{rad/s}}$$

Torque e potência

- O torque máximo produzido pelo motor V8 de 5.4 L de um Ford GT 2005 é 678 N · m, a 4500 rev/min. Determine a potência desenvolvida pelo motor ao operar sob estas condições de torque máximo

Torque e potência

- Resolução:

- O torque máximo produzido pelo motor V8 de 5.4 L de um Ford GT 2005 é 678 N · m, a 4500 rev/min. Determine a potência desenvolvida pelo motor ao operar sob estas condições de torque máximo

$$P = \tau\omega$$
$$\omega = 4500\ \text{rev/min} = 471\ \text{rad/s}$$
$$P = (678\ \text{N}\cdot\text{m})\cdot(471\ \text{rad/s}) = \boxed{315\ \text{kW}}$$

Torque e trabalho

- As especificações da London Eye incluem sua capacidade de frear, até parar, com os compartimentos de passageiros percorrendo no máximo 10 m. A rapidez de operação da roda de 135 m de diâmetro e 1600 toneladas é de 2.0 rev/h.

  - (*a*) Estime o torque necessário para parar a roda, enquanto seu perímetro percorre 10 m.

  - (*b*) Supondo que a força de freamento é aplicada sobre o perímetro, qual é sua magnitude?

Torque e trabalho

- Resolução:

$W = \Delta K$ $\quad$ $W = \tau\,\Delta\theta$

$$s = r\,\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{s}{r} = \frac{10\,\text{m}}{67{,}5\,\text{m}} = 0{,}148\ \text{rad}$$

$$I = mr^2 = (1{,}6 \times 10^6\,\text{kg})(67{,}5\,\text{m})^2$$
$$= 7{,}29 \times 10^9\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\tau\,\Delta\theta = 0 - \tfrac{1}{2}I\omega_0^2$$

logo $$\tau = -\frac{I\omega_0^2}{2\,\Delta\theta} = -\frac{(7{,}29 \times 10^9\,\text{kg}\cdot\text{m}^2)(3{,}49 \times 10^{-3}\,\text{rad/s})^2}{2\,(0{,}148\,\text{rad})}$$
$$= \boxed{-3{,}0 \times 10^5\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

a)

- As especificações da London Eye incluem sua capacidade de frear, até parar, com os compartimentos de passageiros percorrendo no máximo 10 m. A rapidez de operação da roda de 135 m de diâmetro e 1600 toneladas é de 2.0 rev/h.
  - *(a)* Estime o torque necessário para parar a roda, enquanto seu perímetro percorre 10 m.
  - *(b)* Supondo que a força de freamento é aplicada sobre o perímetro, qual é sua magnitude?

b)

$$|\tau| = FR$$

$$F = \frac{|\tau|}{R} = \frac{3{,}0 \times 10^5\,\text{N}\cdot\text{m}}{67{,}5\,\text{m}} = \boxed{4{,}4 \times 10^3\,\text{N}}$$

Momento angular

- Determine a quantidade de movimento angular, em relação à origem, para as seguintes situações. Trate o carro como uma partícula pontual.

  - (*a*) Um carro de 1200 kg de massa que se move em um círculo de 20 m de raio com uma rapidez de 15 m/s. O círculo está no plano *xy*, centrado na origem. Visto de um ponto do eixo *z* positivo, o carro se move no sentido anti-horário.

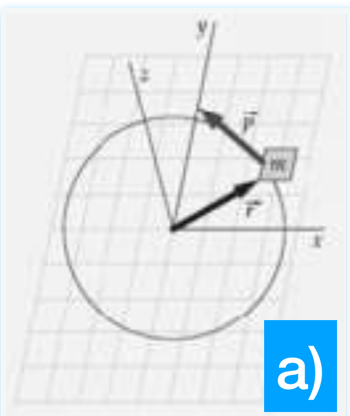
  - (*b*) O mesmo carro, movendo-se no plano *xy* com velocidade $\overrightarrow{v} = -(15\ \mathrm{m/s})\hat{i}$ ao longo da linha $y = y_0 = 20$ m, paralela ao eixo *x*

  - (*c*) Um disco homogêneo no plano *xy*, de raio 20 m e massa 1200 kg, girando a 0,75 rad/s em torno de seu eixo, que também é o eixo *z*. Visto de um ponto do eixo *z* positivo, o disco se move no sentido anti- horário.

Momento angular

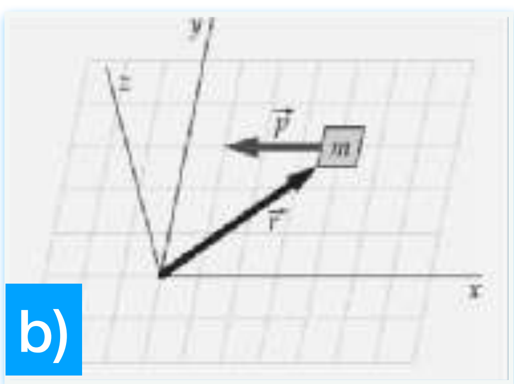
- Determine a quantidade de movimento angular, em relação à origem, para as seguintes situações. Trate o carro como uma partícula pontual.
  - (a) Um carro de 1200 kg de massa que se move em um círculo de 20 m de raio com uma rapidez de 15 m/s. O círculo está no plano *xy*, centrado na origem. Visto de um ponto do eixo *z* positivo, o carro se move no sentido anti-horário.
  - (b) O mesmo carro, movendo-se no plano *xy* com velocidade $\vec{v} = -(15\ \mathrm{m/s})\hat{i}$ ao longo da linha $y = y_0 = 20$ m, paralela ao eixo *x*
  - (c) Um disco homogêneo no plano *xy*, de raio 20 m e massa 1200 kg, girando a 0,75 rad/s em torno de seu eixo, que também é o eixo *z*. Visto de um ponto do eixo *z* positivo, o disco se move no sentido anti- horário.

- Resolução:



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = rmv \,\mathrm{sen}\, 90° \hat{k}$$
$$= (20\ \mathrm{m})(1200\ \mathrm{kg})(15\ \mathrm{m/s})\hat{k}$$
$$= \boxed{3{,}6 \times 10^5\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}\ \hat{k}}$$

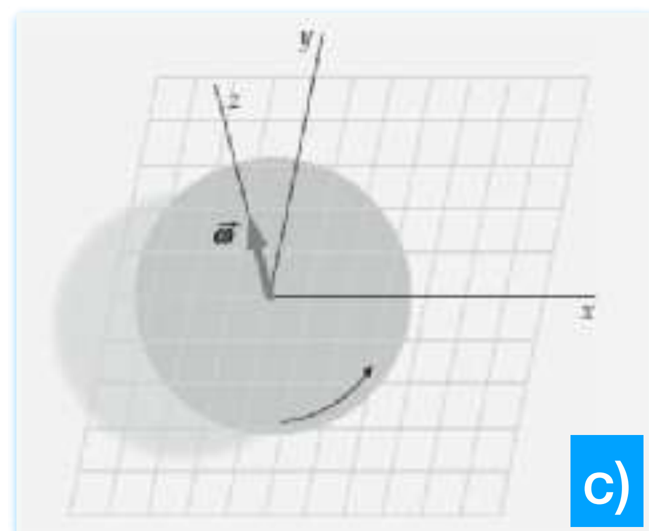
a)



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = x\hat{i} + y_0\hat{j}$$
$$\vec{p} = m\vec{v} = -mv\hat{i}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (x\hat{i} + y_0\hat{j}) \times (-mv\hat{i})$$
$$= -xmv(\hat{i} \times \hat{i}) - y_0 mv(\hat{j} \times \hat{i})$$
$$= 0 - y_0 mv(-\hat{k}) = y_0 mv\hat{k}$$
$$= (20\ \mathrm{m})(1200\ \mathrm{kg})(15\ \mathrm{m/s})\hat{k}$$
$$= \boxed{3{,}6 \times 10^5\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}\ \hat{k}}$$

b)



$$\vec{L} = I\vec{\omega} = I\omega\hat{k} = \tfrac{1}{2}mR^2\omega\hat{k}$$
$$= \tfrac{1}{2}(1200\ \mathrm{kg})(20\ \mathrm{m})^2(0{,}75\ \mathrm{rad/s})\hat{k}$$
$$= \boxed{1{,}8 \times 10^5\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}\ \hat{k}}$$

c)

Conservação do momento angular

- Em um playground, corre com uma rapidez inicial de 2.5 m/s em uma trajetória *tangente* à borda de um carrossel, cujo raio é 2.0 m. O carrossel, inicialmente em repouso, tem um momento de inércia de 500 kg.m². A criança pula no carrossel. Determine a velocidade angular final do conjunto criança mais carrossel.

Conservação do momento angular

- Resolução:

- Em um playground, corre com uma rapidez inicial de 2.5 m/s em uma trajetória *tangente* à borda de um carrossel, cujo raio é 2.0 m. O carrossel, inicialmente em repouso, tem um momento de inércia de 500 kg.m². A criança pula no carrossel. Determine a velocidade angular final do conjunto criança mais carrossel.

$$L_i = |\vec{r}_{\text{criança}} \times m\vec{v}_i| = Rmv_i$$

$$L_f = I_{\text{sis}}\omega_f = (mR^2 + I_m)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{mvR}{mR^2 + I_m} = \boxed{0{,}21\ \text{rad/s}}$$

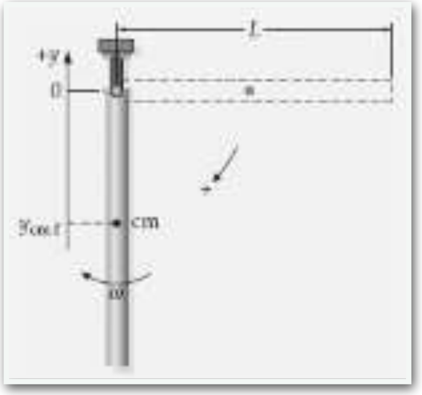
Energia

- Uma barra fina e homogênea, de comprimento L e massa M, articulada em uma das extremidades, é largada do repouso, de uma posição horizontal. Desprezando o atrito e a resistência do ar, determine:
  - (*a*) a velocidade angular da barra, quando ela passa pela posição vertical
  - (*b*) a força exercida sobre a barra pelo pivô, nesse instante
  - (*c*) Qual seria a velocidade angular inicial necessária para a barra chegar até a posição vertical no topo de sua oscilação?

Energia

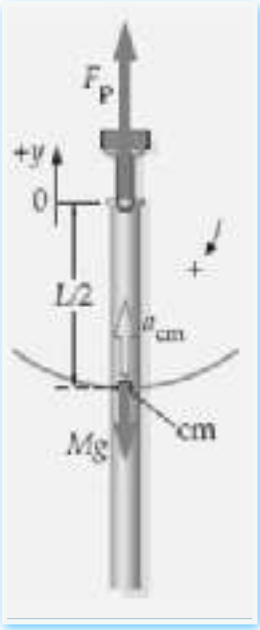
- Uma barra fina e homogênea, de comprimento *L* e massa *M*, articulada em uma das extremidades, é largada do repouso, de uma posição horizontal. Desprezando o atrito e a resistência do ar, determine:
  - (*a*) a velocidade angular da barra, quando ela passa pela posição vertical
  - (*b*) a força exercida sobre a barra pelo pivô, nesse instante
  - (c) Qual seria a velocidade angular inicial necessária para a barra chegar até a posição vertical no topo de sua oscilação?

- Resolução:



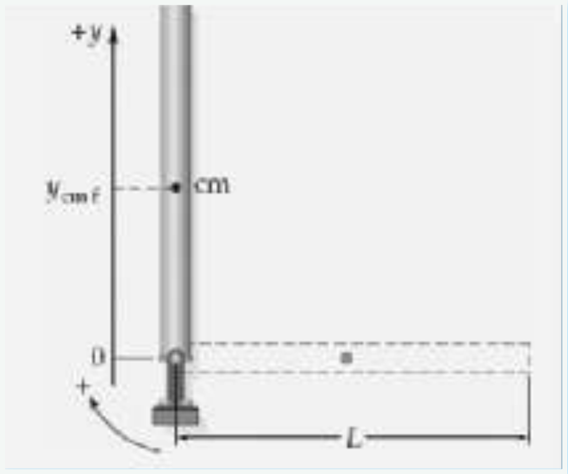
a)

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$
$$\tfrac{1}{2}I\omega_f^2 + Mgy_{cm\,f} = \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 + Mgy_{cm\,i}$$
$$\frac{1}{2}I\omega_f^2 + Mg\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 + 0$$
$$\omega_f = \sqrt{\frac{MgL}{I}}$$
$$I = \tfrac{1}{3}ML^2 \text{ logo } \omega_f = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{3g}{L}}}$$



b)

$$\Sigma F_{ext\,y} = Ma_{cm}$$
$$F_p - Mg = Ma_{cm}$$
$$a_{cm} = r\omega^2$$
$$a_{cm} = \frac{L}{2}\frac{3g}{L} = \frac{3}{2}g$$
$$F_p = Mg + Ma_{cm} = Mg + M\tfrac{3}{2}g = \boxed{\tfrac{5}{2}Mg}$$
$$K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_i^2$$



c)

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$
$$\tfrac{1}{2}I\omega_f^2 + Mgy_{cm\,f} = \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 + Mgy_{cm\,i}$$
$$0 + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega_i^2 + 0$$
$$\omega_i = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{3g}{L}}}$$

Sumário

- Corpos rígidos.
- Representação vetorial.
- Torque.
- Momento angular.