CET164

Física I

Prof. Rogério Monteiro

Momento linear e centro de massa

Aula A08

Tópicos da aula

- Momento linear
- Centro de massa
- Extensão a sistemas de várias partículas.
- Determinação do centro de massa

Referências

- Curso de Física Básica. Volume 1: Mecânica. H. Moysés Nussenzveig. Editora Edgard Blucher. 2002.
- Fundamentos de Física. Volume 1: Mecânica. Halliday, Resnick & Walker. 8a edição. Editora LTC. 2009.
- Física para cientista e engenheiros. Volume 1: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica. Paul A. Tipler & Gene Mosca. 6a edição. Editora LTC. 2009.

Objetivos

Ao final da aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender o conceito de centro de massa.
- Ser capaz de calcular o centro de massa de um corpo.

Momento linear

Momento linear

- Quando Newton concebeu sua segunda lei, ele considerou o produto da massa pela velocidade como uma medida da "**quantidade de movimento**" de um objeto.

- Hoje, chamamos o produto da massa pela velocidade de uma partícula de **quantidade de movimento linear,** $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$.

Momento linear

- A quantidade de movimento pode ser pensada como uma medida do esforço necessário para levar uma partícula ao repouso.

- Por exemplo, um caminhão pesado tem mais quantidade de movimento do que um pequeno carro de passeio que viaja com a mesma rapidez. É necessária uma força maior para parar o caminhão, em dado tempo, do que para parar o carro no mesmo tempo.

Momento linear

- Usando a segunda lei de Newton, podemos relacionar a quantidade de movimento de uma partícula à força resultante que atua sobre ela:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- A quantidade de movimento total de um sistema de partículas é a soma vetorial das quantidades de movimento das partículas individuais:

$$\vec{P}_{\text{sis}} = \sum_i m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i$$

Centro de massa e a conservação do momento linear

Conservação do momento linear

- Vamos considerar o caso mais geral de interação entre duas partículas onde, além das forças internas ao sistema, também atuam forças externas.

- Forças externas podem ser gravitacionais, atrito, campos elétricos e magnéticos externos, por exemplo.

Conservação do momento linear

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{1(2)} + \mathbf{F}_1^{(\text{ext})}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{2(1)} + \mathbf{F}_2^{(\text{ext})}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{F}_{1(2)} + \mathbf{F}_{2(1)} + \mathbf{F}_1^{(\text{ext})} + \mathbf{F}_2^{(\text{ext})}$$

$$\mathbf{F}_{1(2)} + \mathbf{F}_{2(1)} = 0,$$

forças internas newtonianas

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(\text{ext})}$$

o momento total **P** do sistema

Conservação do momento linear

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(ext)}$$

A condição necessária e suficiente para que o momento total de um sistema de duas partículas se conserve é que a resultante das forças externas aplicadas ao sistema se **anule**.

Centro de massa

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(ext)}$$

- Esta é equação de movimento de uma única partícula de momento **P** sujeita a uma força $\mathbf{F}^{(ext)}$.
- Assim, podemos tratar o sistema de duas partículas **como se fosse uma só.**
- Também seria possível associar uma posição bem definida a esta superpartícula?
- A resposta é **sim**!

Centro de massa

$$\left.\begin{cases} \mathbf{p}_1 = m\dfrac{d\mathbf{r}_1}{dt} \\ \mathbf{p}_2 = m\dfrac{d\mathbf{r}_2}{dt} \end{cases}\right\} \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$$

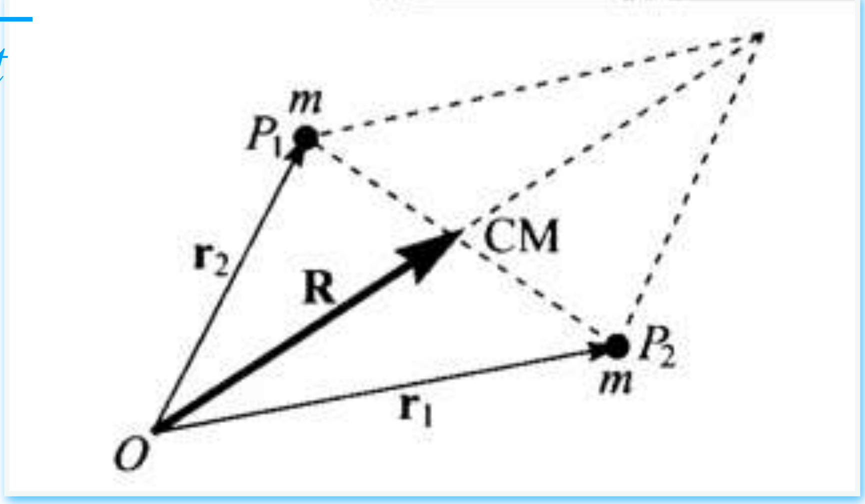
$$M = 2m$$

$$\vec{P} = M\frac{d\vec{R}}{dt}$$

descrição em termos de uma única partícula

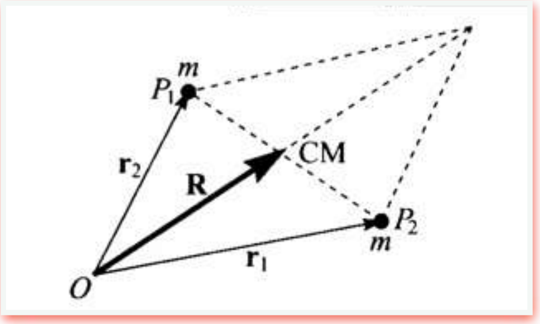
$$\vec{P} = m\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \longleftrightarrow \vec{P} = 2m\frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

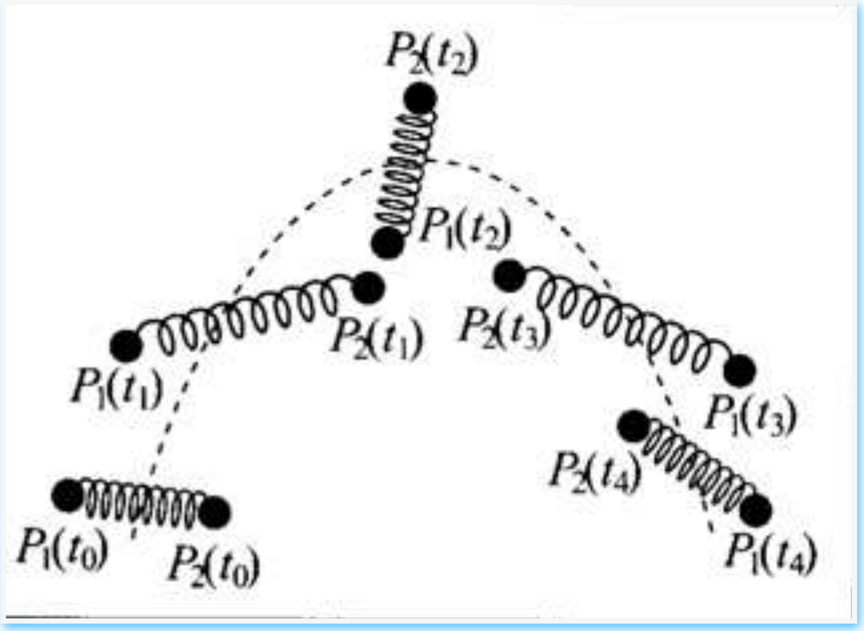


Centro de massa

- **R** é o vetor de posição do centro de massa (CM).



- O CM se move como se fosse uma única partícula de massa igual à massa total do sistema, sobre a qual agiria uma força igual à resultante das forças externas.



Exemplo: sistema formado por uma par de bolinhas de mesma massa e ligadas por uma mola que são arremessadas para cima numa certa direção.

O CM descreverá uma parábola, embora as pontas tenham um movimento bem mais complicado

Centro de massa

- Consideremos agora um sistema de duas partículas de massas quaisquer, m_1 e m_2:

$$\mathbf{P} = m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) = M\frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

$$\boxed{M = m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

a coordenada do centro de massa é a média ponderada dos vetores de posição, com pesos correspondentes às massas.

Se $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$,

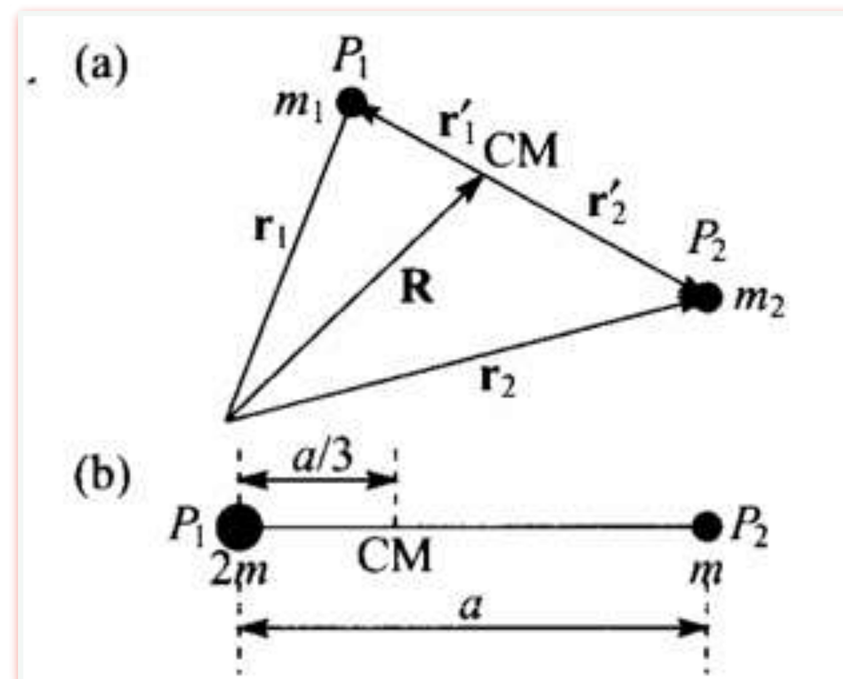
$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \qquad Y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}, \qquad Z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}$$

Centro de massa

- O movimento interno do sistema é descrito pelos deslocamentos relativos das duas partículas em relação ao CM:

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_1 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_2 + m_2\mathbf{r}_2 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$



$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = -\frac{m_2}{M}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1); \qquad \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \frac{m_1}{M}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

$$\mathbf{r}_2' = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{r}_1' \quad (\ m_1\mathbf{r}_1' + m_2\mathbf{r}_2' = 0$$

$$\boxed{m_1\frac{d\mathbf{r}_1'}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2'}{dt} = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0}$$

o momento total do sistema relativo ao CM é nulo

Extensão a sistemas de várias partículas

Extensão a sistemas de várias partículas

- Consideremos um sistema formado por N partículas de massas m_1, m_2, …, m_N , cujos vetores de posição num dado instante t são, respectivamente, $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$, …, $\mathbf{r}_N(t)$.

- Qualquer partícula i do sistema está sujeita a forças internas, representando sua interação com as demais.

- Ela também pode estar sujeita a forças externas.

$$\mathbf{F}_{i(j)} + \mathbf{F}_{j(i)} = 0 \qquad (i, j = 1,2,\ldots,N)$$

forças internas satisfazendo ao princípio da ação e reação

Extensão a sistemas de várias partículas

- Vamos escrever as equações de movimento do sistema de partículas:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{1(2)} + \mathbf{F}_{1(3)} + \ldots + \mathbf{F}_{1(N)} + \mathbf{F}_1^{(\text{ext})} \\ m_2 \dfrac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{2(1)} + \mathbf{F}_{2(3)} + \ldots + \mathbf{F}_{2(N)} + \mathbf{F}_2^{(\text{ext})} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_N \dfrac{d^2\mathbf{r}_N}{dt^2} = \mathbf{F}_{N(1)} + \mathbf{F}_{N(2)} + \ldots + \mathbf{F}_{N(N-1)} + \mathbf{F}_N^{(\text{ext})} \end{cases} \longrightarrow \quad m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} \mathbf{F}_{i(j)} + \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

Extensão a sistemas de várias partículas

- Somando membro a membro:

$$\mathbf{F}_{i(j)} + \mathbf{F}_{j(i)} = 0 \qquad (i, j = 1,2,\ldots,N)$$

resultante das forças externas que atuam sobre o sistema

$$\mathbf{F}^{(\mathrm{ext})} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} \mathbf{F}_{i(j)} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})}$$

massa total do sistema

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ (i\neq j)}}^{N} \mathbf{F}_{i(j)} = 0$$

a resultando de todas as forças internas do sistema se anula

$$M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

vetor posição do centro de massa do sistema de *N* partículas

Extensão a sistemas de várias partículas

- No sistema de *N* partículas o princípio que o CM também é o centro do movimento, ou seja, move-se como se o momento total **P** do sistema estivesse concentrado nele continua válido.

- Da mesma forma, o movimento interno do sistema (relativo ao CM) é nulo.

Determinação do centro de massa

Determinação do centro de massa

- Antes de estudarmos a determinação do CM de um sistema, vamos discutir um resultado muito importante.

- Suponhamos que um sistema de N partículas seja subdividido em duas partes: I com N_I partículas e II com N_{II} partículas

- Assim, temos que $N = N_I + N_{II}$

Determinação do centro de massa

- Logo: $$M\mathbf{R} = (M_I + M_{II})\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{N_I} m_j \mathbf{r}_j + \sum_{k=1}^{N_{II}} m_k \mathbf{r}_k$$

- Mas: $$M_I \mathbf{R}_I = \sum_{j=1}^{N_I} m_j \mathbf{r}_j, \qquad M_{II} \mathbf{R}_{II} = \sum_{k=1}^{N_{II}} m_k \mathbf{r}_k$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{R} = \frac{M_I \mathbf{R}_I + M_{II} \mathbf{R}_{II}}{M_I + M_{II}}$$

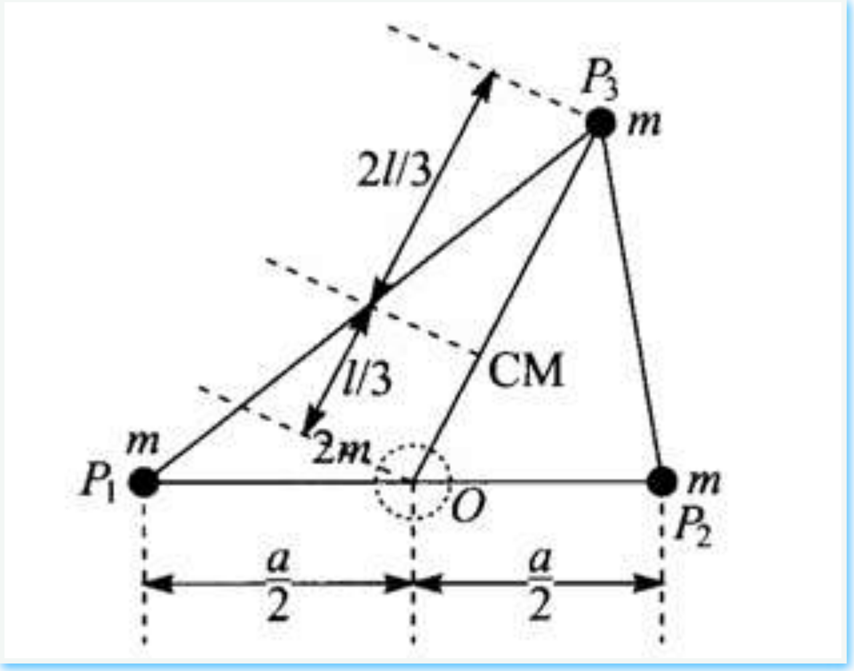
- Concluímos portanto que podemos substituir o subsistema I pela sua massa M_I concentrada em $\mathbf{R}_I$ e de maneira equivalente, a mesma consideração vale para o subsistema II.

Determinação do centro de massa

Na determinação do CM de um sistema, qualquer parte dele pode ser substituída por uma partícula de massa igual à parte deste, colocada no CM da parte considerada

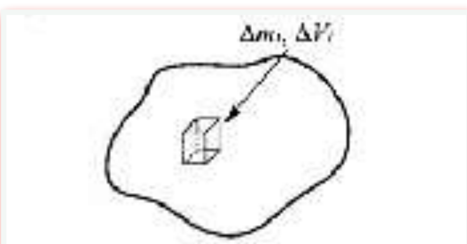
Determinação do centro de massa

- Exemplo: vamos determinar o CM de um sistema de três partículas de mesma massa *m*, não alinhadas.

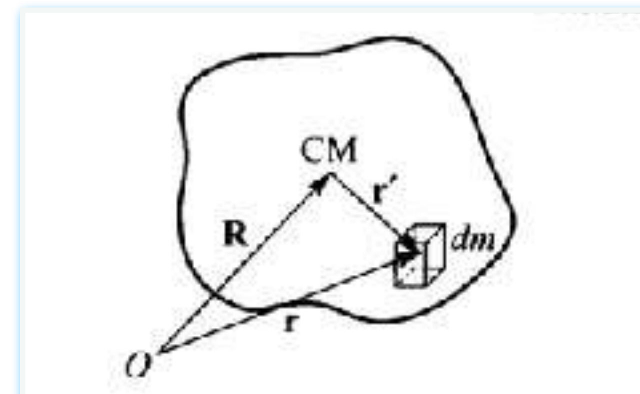


Determinação do centro de massa

- Até aqui trabalhamos com distribuições discretas de massa. Como proceder em distribuições contínuas?



$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i (\Delta m_i)\mathbf{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_j \to 0} \mathbf{R} = \frac{\int \mathbf{r}\,dm}{\int dm}$$



$$\frac{dm}{dV} = \rho(\mathbf{r})$$

se tivermos $\rho(r) = \text{constante}$ dizemos que o corpo é homogêneo; neste caso, a massa de qualquer volume do corpo é diretamente proporcional a este volume

Determinação do centro de massa

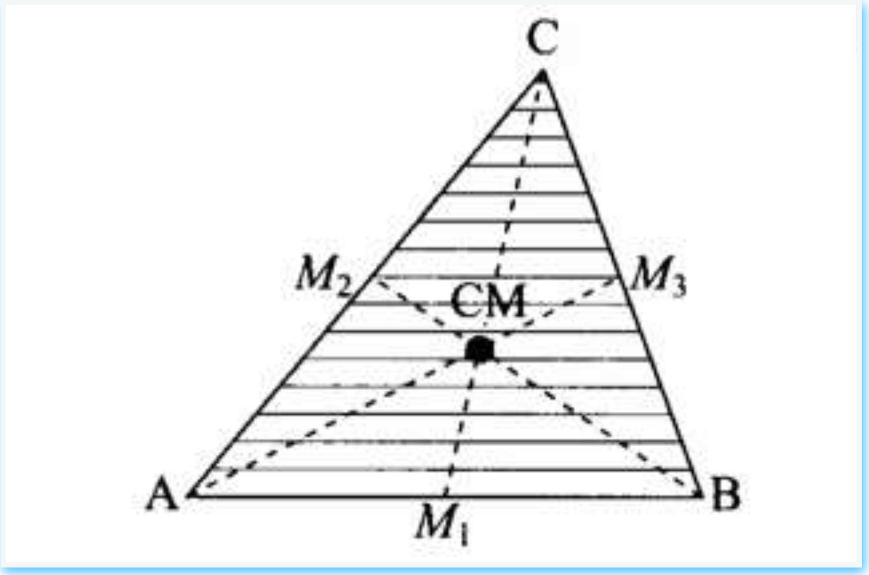
se uma distribuição homogênea de massa tem um centro de simetria ele é também o CM da distribuição

- Exemplos:
  - o CM de um segmento de reta (fio) homogêneo é o seu ponto médio;
  - para um anel circular, é o centro do anel (note que neste caso o CM do corpo **não** está contido no corpo);
  - O CM de uma placa retangular ou circular homogênea é o centro da placa;
  - O CM de um paralelepípedo retângulo ou esfera homogênea é o centro geométrico.

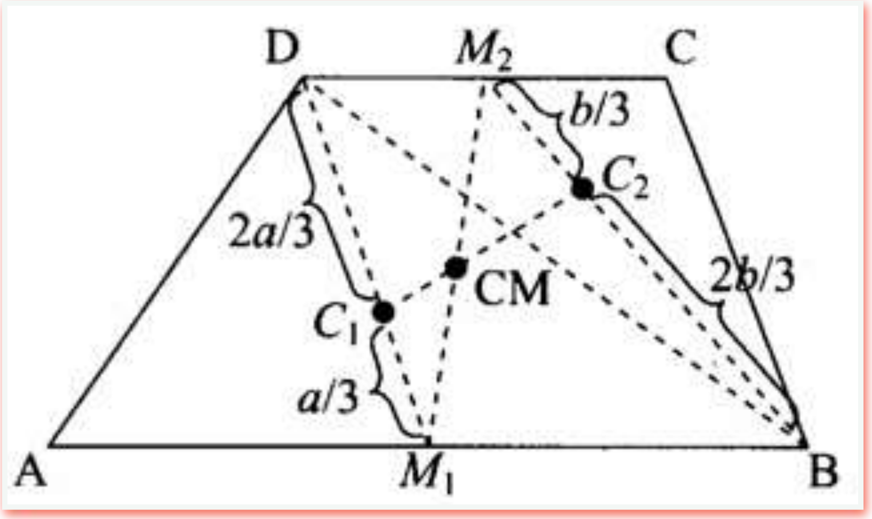
se uma distribuição de massa tem qualquer elemento de simetria, como eixo ou plano de simetria, o CM está situado sobre este elemento.

Determinação do centro de massa

- Exemplos:



placa triangular homogênea



placa trapezoidal homogênea

Alguns exemplos

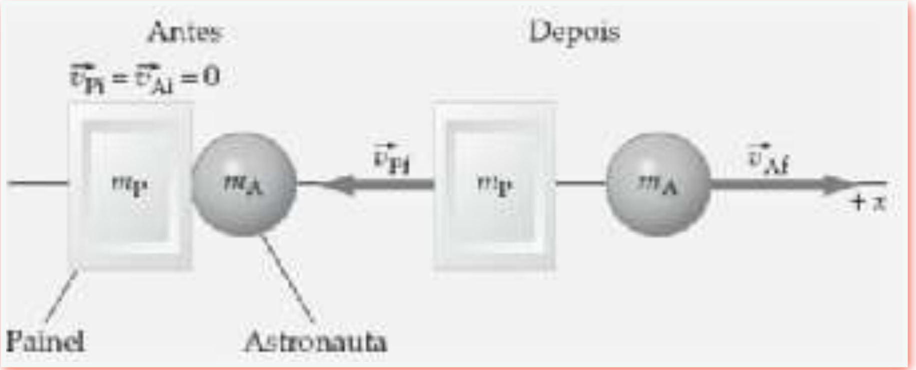
Momento linear

- Durante um reparo do telescópio espacial Hubble, uma astronauta substitui um painel solar avariado. Empurrando para o espaço o painel retirado, ela é empurrada no sentido oposto. A massa da astronauta é 60 kg e a massa do painel é 80 kg. A astronauta e o painel estão inicialmente em repouso, em relação ao telescópio, quando a astronauta empurra o painel. Depois disso, o painel se move a 0.30 m/s em relação ao telescópio. Qual é a subseqüente velocidade da astronauta em relação ao telescópio? (Durante esta operação a astronauta está amarrada à nave; para efeito de cálculos, suponha que o cabo que a prende permanece frouxo.)

Momento linear

- Durante um reparo do telescópio espacial Hubble, uma astronauta substitui um painel solar avariado. Empurrando para o espaço o painel retirado, ela é empurrada no sentido oposto. A massa da astronauta é 60 kg e a massa do painel é 80 kg. A astronauta e o painel estão inicialmente em repouso, em relação ao telescópio, quando a astronauta empurra o painel. Depois disso, o painel se move a 0.30 m/s em relação ao telescópio. Qual é a subseqüente velocidade da astronauta em relação ao telescópio? (Durante esta operação a astronauta está amarrada à nave; para efeito de cálculos, suponha que o cabo que a prende permanece frouxo.)

- Resolução:



$$\sum_i \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}_{sis}}{dt}$$

$$0 = \frac{d\vec{P}_{sis}}{dt},$$

$$\text{logo} \quad \vec{P}_{sis} = \text{constante}$$

$$\vec{P}_{sis\,i} = \vec{P}_{sis\,f}$$

$$m_P\vec{v}_{Pi} + m_A\vec{v}_{Ai} = m_P\vec{v}_{Pf} + m_A\vec{v}_{Af}$$

$$0 + 0 = m_P\vec{v}_{Pf} + m_A\vec{v}_{Af}$$

$$\vec{v}_{Af} = -\frac{m_P}{m_A}\vec{v}_{Pf} = -\frac{80\text{ kg}}{60\text{ kg}}(-0{,}30\text{ m/s})\hat{i} = \boxed{(0{,}40\text{ m/s})\hat{i}}$$

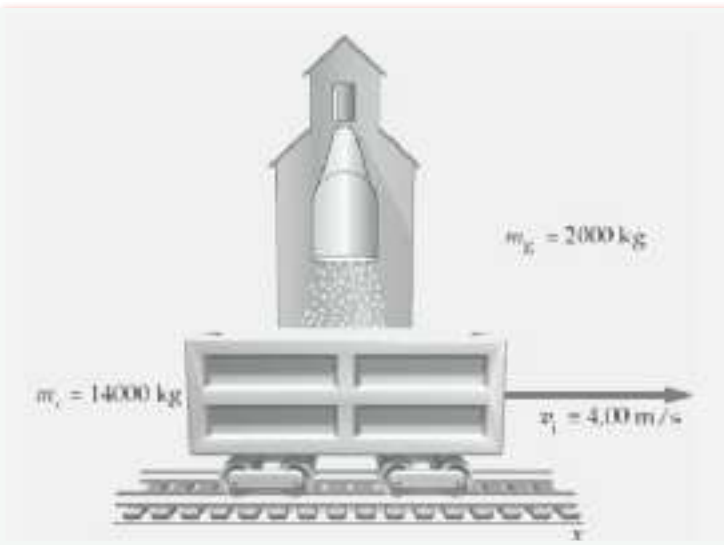
Momento linear

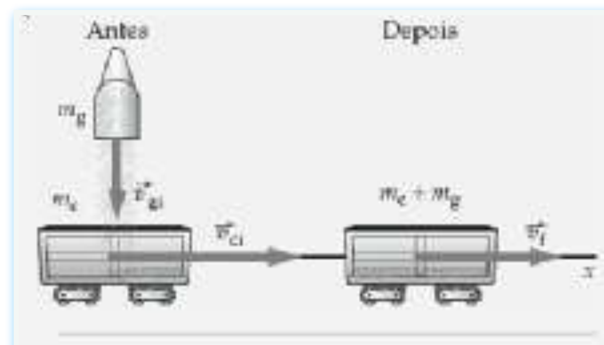
- Um vagão ferroviário de 14000 kg está se dirigindo horizontalmente, a 4.0 m/s, para um pátio de manobras. Ao passar por um silo, 2000 kg de grãos caem subitamente dentro dele. Quanto tempo leva para o carro cobrir a distância de 500 m entre o silo e o pátio de manobras? Suponha que os grãos caíram na vertical e desconsidere o atrito e o arraste do ar.

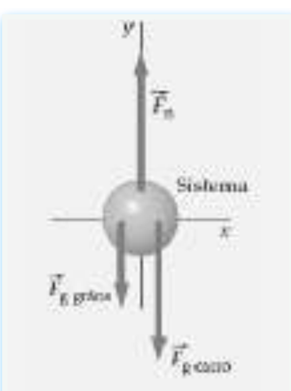
Momento linear

- Um vagão ferroviário de 14000 kg está se dirigindo horizontalmente, a 4.0 m/s, para um pátio de manobras. Ao passar por um silo, 2000 kg de grãos caem subitamente dentro dele. Quanto tempo leva para o carro cobrir a distância de 500 m entre o silo e o pátio de manobras? Suponha que os grãos caíram na vertical e desconsidere o atrito e o arraste do ar.

- Resolução:







$$\sum \vec{F}_{\text{i ext}} = \vec{F}_{\text{g grãos}} + \vec{F}_{\text{g carro}} + \vec{F}_n = \frac{d\vec{P}_{\text{sis}}}{dt}$$

$$F_{\text{g grãos }x} + F_{\text{g carro }x} + F_{n\,x} = \frac{dP_{\text{sis }x}}{dt}$$

$$0 + 0 + 0 = \frac{dP_{\text{sis }x}}{dt}$$

$$\therefore P_{\text{sis f}x} = P_{\text{sis i}x}$$

$$P_{\text{sis f}x} = P_{\text{sis i}x}$$

$$(m_c + m_g)v_{fx} = m_c v_{ix} + m_g(0)$$

$$v_{fx} = \frac{m_c}{m_c + m_g} v_{ix}$$

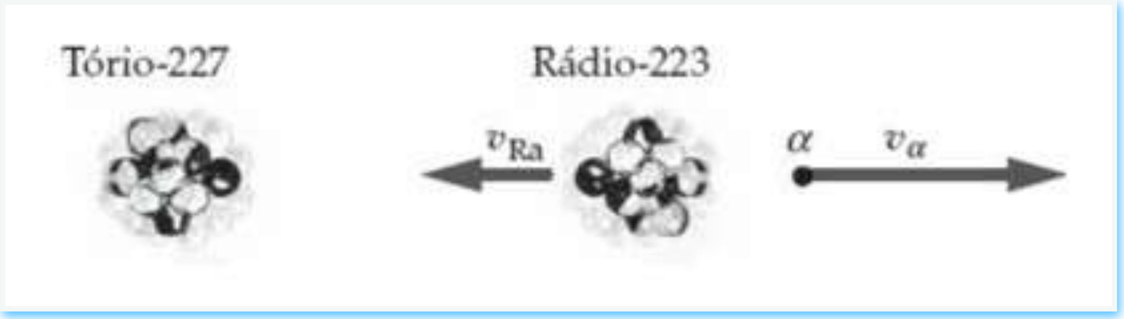
$$\Delta t = \frac{d}{v_{fx}} = \frac{(m_c + m_g)d}{m_c v_{ix}}$$

$$= \frac{(14\,000\text{ kg} + 2000\text{ kg})(500\text{ m})}{(14\,000\text{ kg})(4{,}00\text{ m/s})}$$

$$= \boxed{1{,}43 \times 10^2\text{ s}}$$

Momento linear

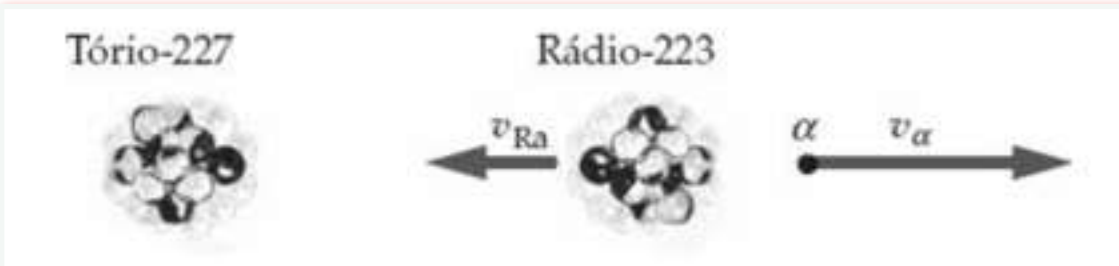
- Um núcleo radioativo de tório-227 (massa 227 u), em repouso, decai em um núcleo de rádio-223 (massa 223 u), emitindo uma partícula alfa (massa 4.00 u). A medida da energia cinética da partícula *a* é de 6.00 MeV. Qual é a energia cinética de recuo do núcleo de rádio?



Momento linear

- Um núcleo radioativo de tório-227 (massa 227 u), em repouso, decai em um núcleo de rádio-223 (massa 223 u), emitindo uma partícula alfa (massa 4.00 u). A medida da energia cinética da partícula *a* é de 6.00 MeV. Qual é a energia cinética de recuo do núcleo de rádio?

- Resolução:



$$K_{ra} = \tfrac{1}{2} m_{ra} v_{ra}^2$$

$$K_{\alpha} = \tfrac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2$$

$$m_{\alpha} v_{\alpha} = m_{ra} v_{ra}$$

$$K_{ra} = \tfrac{1}{2} m_{ra} v_{ra}^2 \qquad K_{\alpha} = \tfrac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2$$

$$v_{ra} = \left(\frac{2K_{ra}}{m_{ra}}\right)^{1/2} \qquad v_{\alpha} = \left(\frac{2K_{\alpha}}{m_{\alpha}}\right)^{1/2}$$

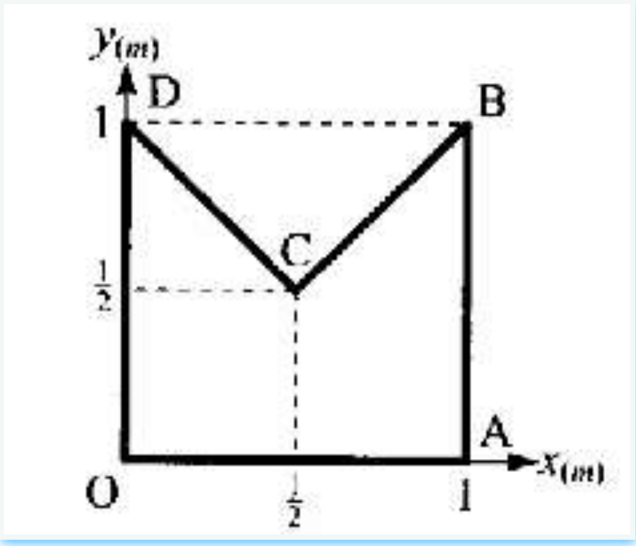
$$\text{logo} \quad m_{\alpha}\left(\frac{2K_{\alpha}}{m_{\alpha}}\right)^{1/2} = m_{ra}\left(\frac{2K_{ra}}{m_{ra}}\right)^{1/2}$$

$$K_{ra} = \frac{m_{\alpha}}{m_{ra}} K_{\alpha} = \frac{4{,}00\ \text{u}}{223\ \text{u}}(6{,}00\ \text{MeV}) = \boxed{0{,}107\ \text{MeV}}$$

Centro de massa

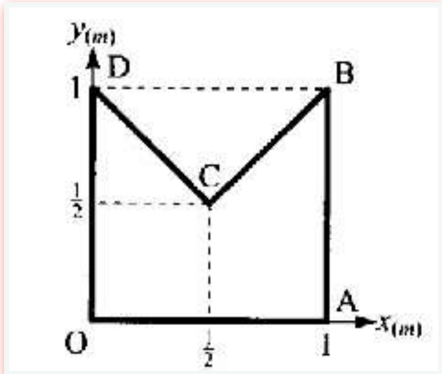
- (a) Ache as coordenadas do CM (centro de massa) da placa homogênea OABCD indicada na figura, dividindo-a em três triângulos iguais.

- (b) Mostre que se obtém o mesmo resultado calculando o CM do sistema formado pelo quadrado OABD e pelo triângulo BCD que dele foi removido, atribuindo massa negativa ao triângulo.



Centro de massa

- Resolução:



- (a) Ache as coordenadas do CM (centro de massa) da placa homogênea OABCD indicada na figura, dividindo-a em três triângulos iguais.
- (b) Mostre que se obtém o mesmo resultado calculando o CM do sistema formado pelo quadrado OABD e pelo triângulo BCD que dele foi removido, atribuindo massa negativa ao triângulo.

$T_1 = OCD$, $T_2 = OCA$ e $T_3 = ACB$.

$$T_1 = \left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$$
$$T_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$$
$$T_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}}{3} = \frac{1}{2}$$
$$Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{7}{18}$$

$$CM = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{18}\right)$$

a)

$$X_q = \frac{1}{2}, \quad Y_q = \frac{1}{2}$$

$$X_t = \frac{1}{2}, \quad Y_t = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

$$X = \frac{m_q X_q + m_t X_t}{m_q + m_t} = \frac{4m \times \frac{1}{2} - m \times \frac{1}{2}}{4m - m} = \frac{1}{2}$$
$$Y = \frac{m_q Y_q + m_t Y_t}{m_q + m_t} = \frac{4m \times \frac{1}{2} - m \times \frac{5}{6}}{4m - m} = \frac{7}{18}$$

b)

Sumário

- Momento linear
- Centro de massa
- Extensão a sistemas de várias partículas.
- Determinação do centro de massa