



# CET164

## Física I

Prof. Rogério Monteiro

# **Cinemática vetorial I - Movimento retilíneo**

Aula A02

# Tópicos da aula

- Velocidade média
- Velocidade instantânea
- O problema inverso
- Aceleração
- Movimento retilíneo uniformemente acelerado

# Referências

- Curso de Física Básica. Volume 1: Mecânica. H. Moysés Nussenzveig. Editora Edgard Blucher. 2002.
- Fundamentos de Física. Volume 1: Mecânica. Halliday, Resnick & Walker. 8a edição. Editora LTC. 2009.

# Objetivos

Ao final da aula, você deverá ser capaz de:

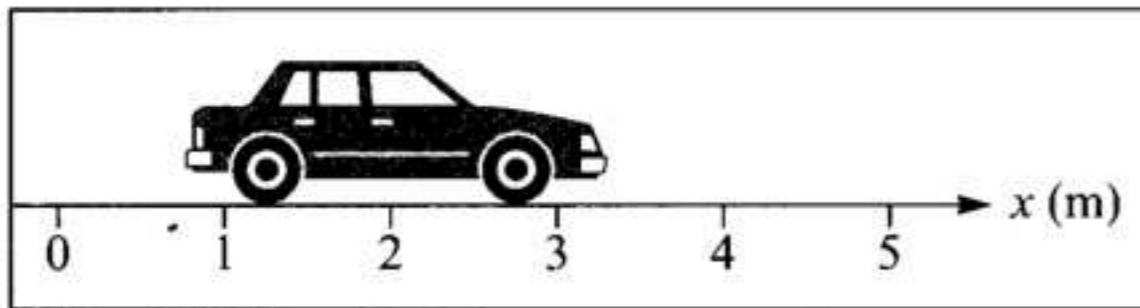
- Descrever conceitualmente e matematicamente posição, velocidade (instantânea e média) e aceleração (instantânea e média) no movimento retilíneo.
- Interpretar gráficos de movimento ( $x(t) \times t$ ,  $v(t) \times t$ ).
- Resolver problemas simples de derivação e integração numéricas.

# Velocidade média

# Velocidade média

- A análise do movimento é um problema fundamental em Física.
- Iniciaremos nossos estudos abordando os conceitos inerentes à descrição do movimento (cinemática), sem ainda considerar o problema de como o movimento se reproduz numa dada situação física (dinâmica).
- Vamos começar tratando do movimento em uma só dimensão.

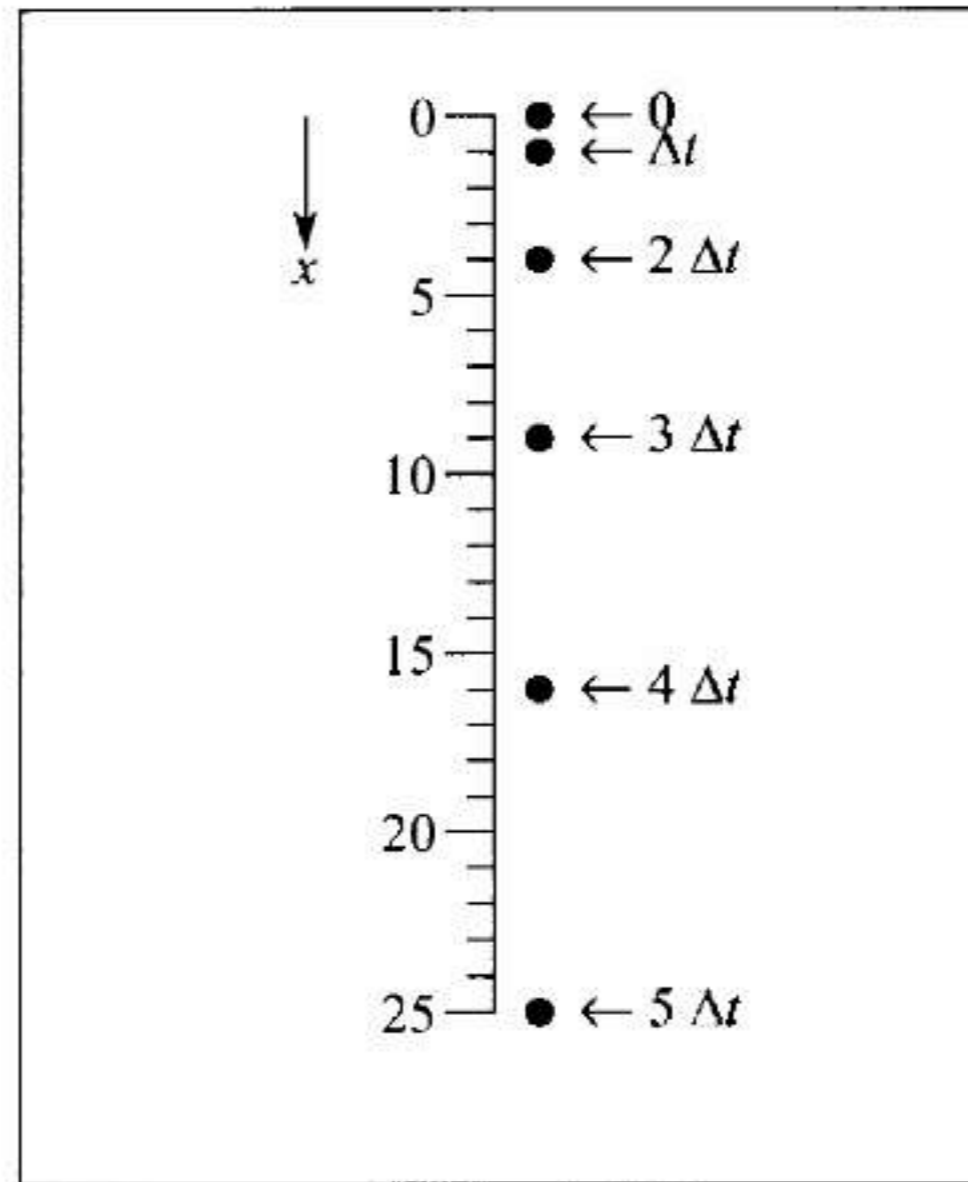
# Velocidade média



$t$ (s)	0	1	2	3	...
$x$ (m)	0	0,8	3,1	1,5	...

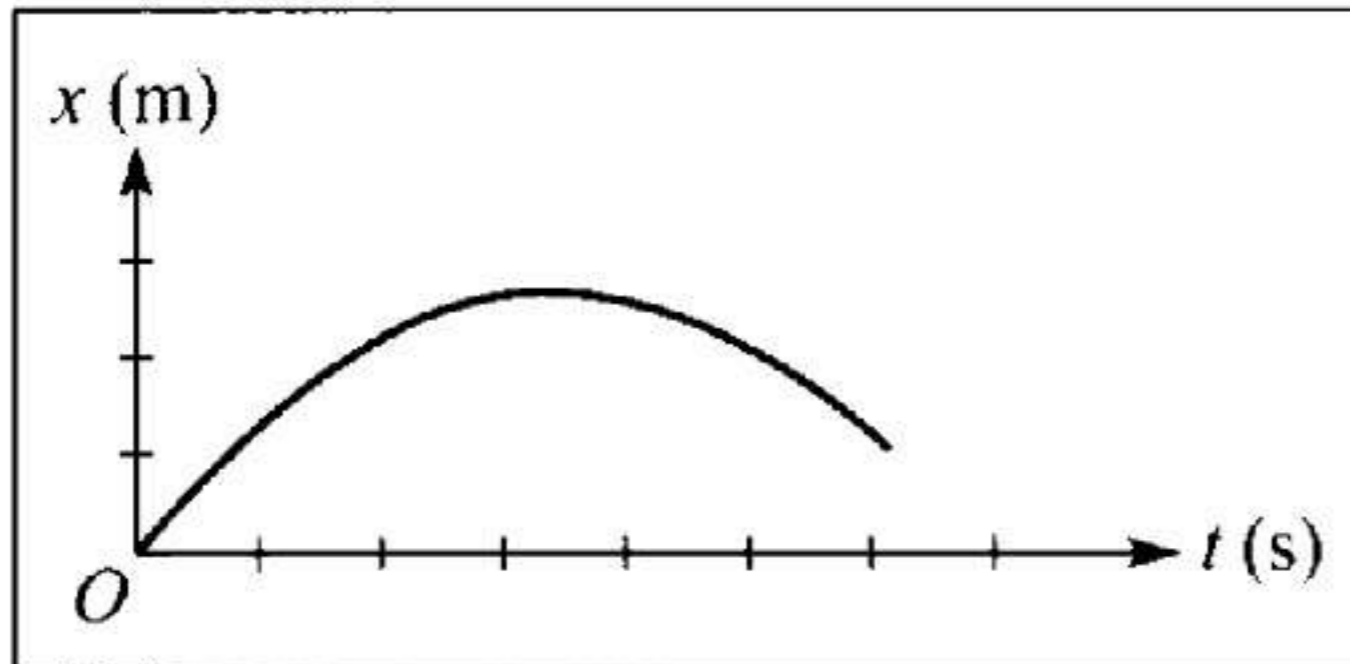
# Velocidade média

[https://www.if.ufrj.br/~pef/producao\\_academica/dissertacoes/2011\\_Marco\\_Adriano\\_Dias/cademo\\_do\\_professor.pdf](https://www.if.ufrj.br/~pef/producao_academica/dissertacoes/2011_Marco_Adriano_Dias/cademo_do_professor.pdf)



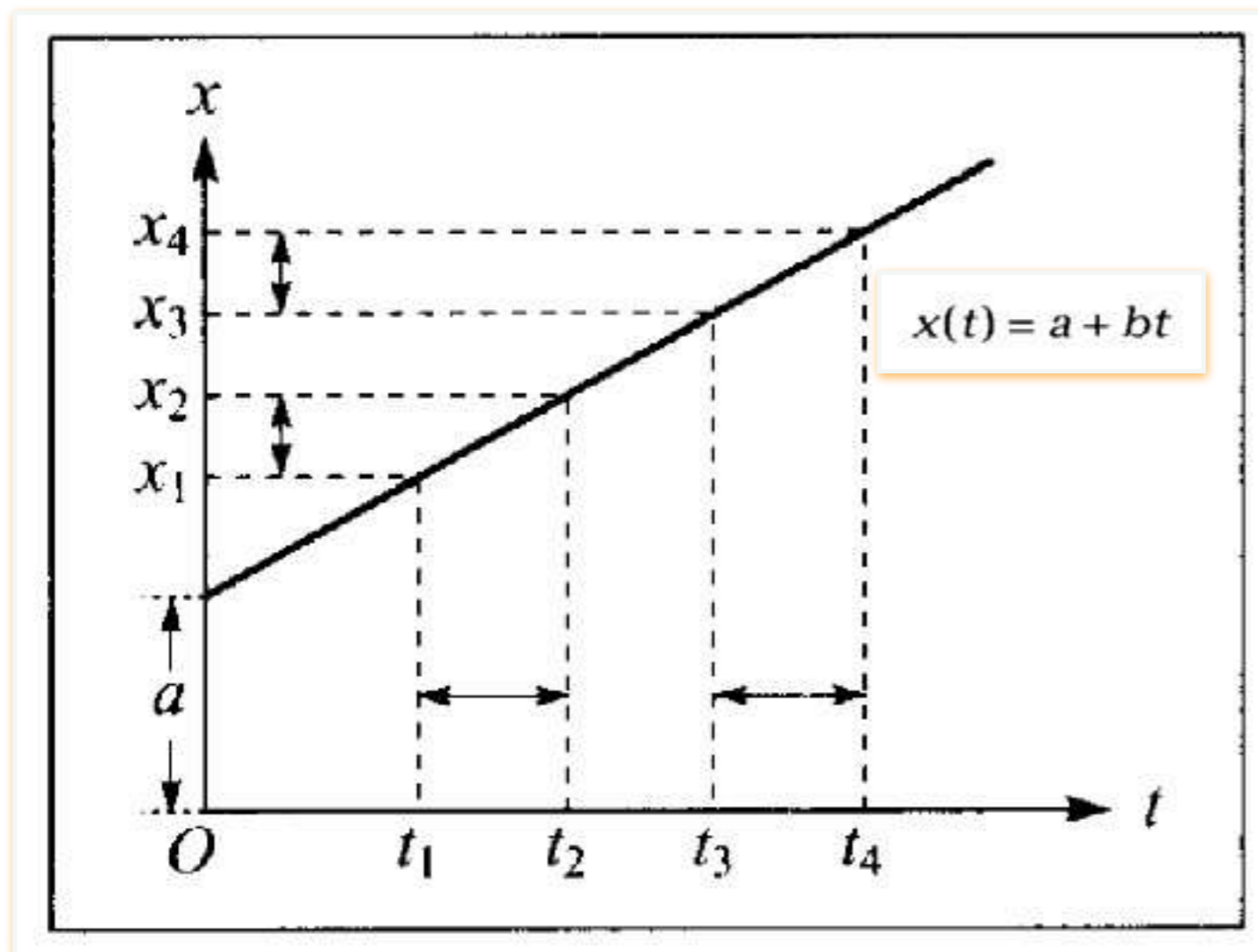


# Velocidade média



# Velocidade média

- O movimento mais simples é o unidimensional. Seu gráfico é uma reta:



$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

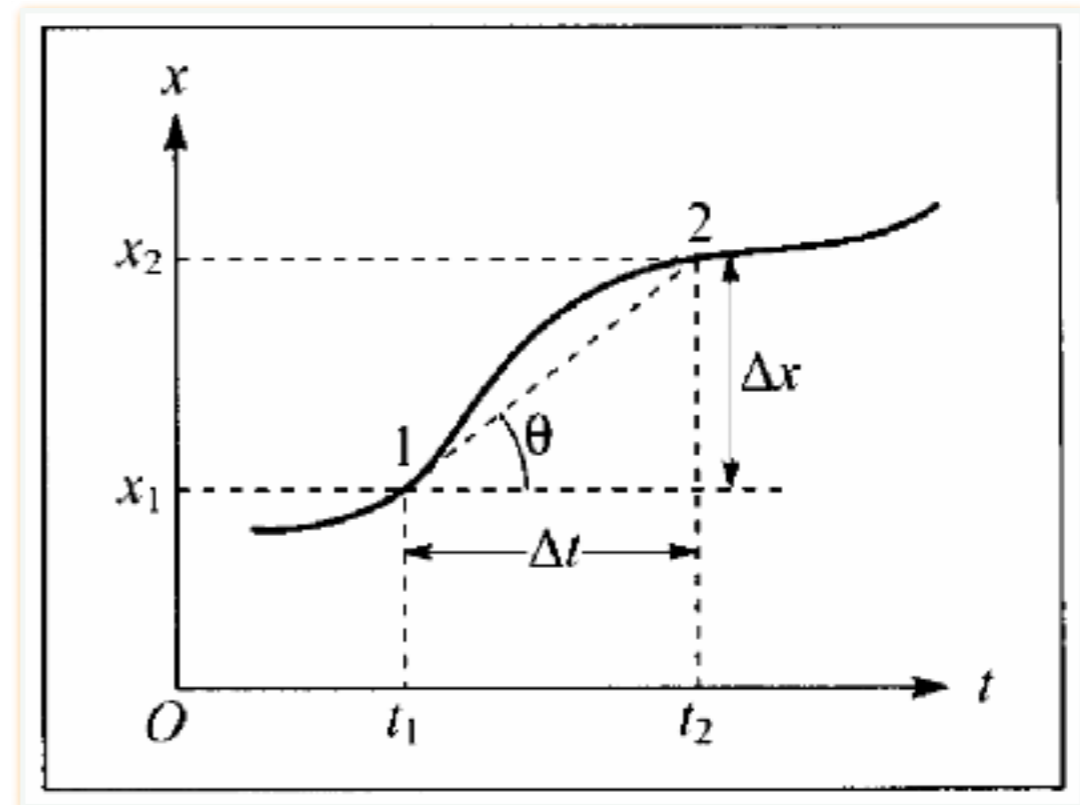
$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

equação horária do movimento retilíneo uniforme

# Velocidade média

- Qualquer movimento retilíneo não-uniforme é chamado de **acelerado**.
- Chamados de velocidade média entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ :

$$\bar{v}_{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



# Velocidade instantânea

# Velocidade instantânea

- O que é a velocidade num dado instante  $t$ ?



**O seu carro estava a 120 km/h,  
quando o limite de velocidade aqui  
é de 60 km/h!**



**Como eu podia estar a 120 km/h se só estava dirigindo aqui a cerca de 1 minuto, e não durante uma hora?**





**O que quero dizer é que, se continuasse em frente do jeito que estava, teria percorrido 120 km em uma hora!**



**Se eu tivesse continuado sempre em frente, teria batido naquele prédio ali!**



**Bem, isso seria verdade. Mas, se tivesse continuado em frente por 1 minuto, teria percorrido  $120 \text{ km}/60 = 2\text{km}$ , e em 1s teria percorrido  $2\text{km}/60 = 33.3 \text{ m}$  e em 0.1 s teria percorrido 3.33m e teria dado perfeitamente para prosseguir durante 0,1s.**



**Mas o limite de velocidade aqui é 60 km/h, e não de 1,66 m em 0,1s!**

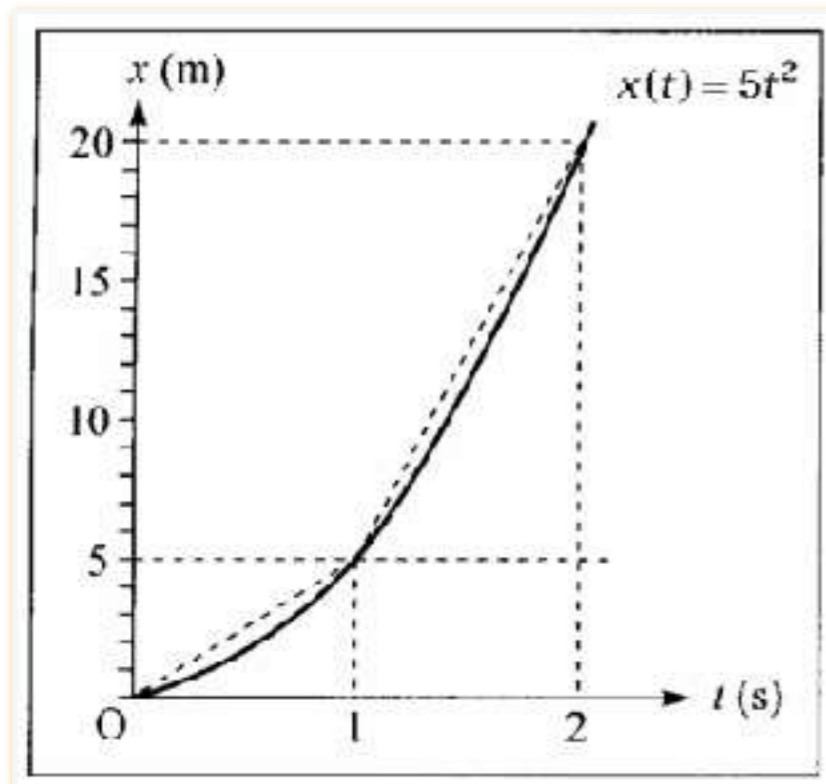


**É a mesma coisa. O que conta é a  
velocidade instantânea. Desça do  
veículo!**



# Velocidade instantânea

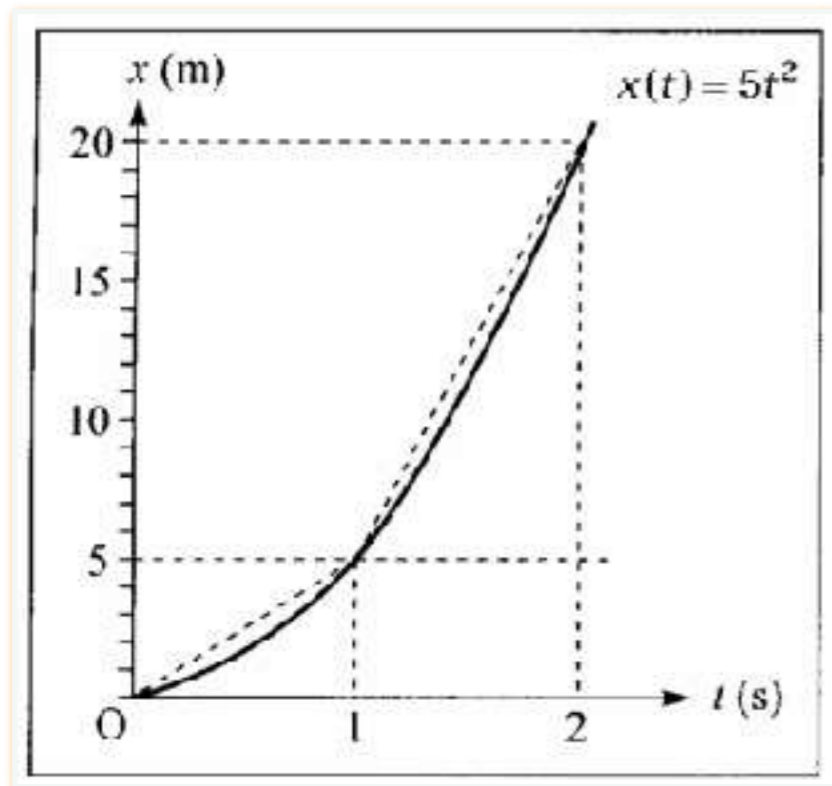
- Qual a velocidade instantânea em  $t = 1\text{ s}$ ?



$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{0 \rightarrow 1} &= \frac{x(1) - x(0)}{1 - 0} = \frac{5 - 0}{1 - 0} = 5 \text{ m/s} \\ \bar{v}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{x(2) - x(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 5}{2 - 1} = 15 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Delta t = 1 \text{ s}$$
$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{0,9 \rightarrow 1} &= \frac{x(1) - x(0,9)}{1 - 0,9} = \frac{5,00 - 4,05}{1 - 0,9} = 9,5 \text{ m/s} \\ \bar{v}_{1 \rightarrow 1,1} &= \frac{x(1,1) - x(1)}{1,1 - 1} = \frac{6,05 - 5,00}{1,1 - 1} = 10,5 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Delta t = 0,1 \text{ s}$$
$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{0,99 \rightarrow 1} &= \frac{x(1) - x(0,99)}{1 - 0,99} = \frac{5,0000 - 4,9005}{1,00 - 0,99} = 9,95 \text{ m/s} \\ \bar{v}_{1 \rightarrow 1,01} &= \frac{x(1,01) - x(1)}{1,01 - 1,00} = \frac{5,1005 - 5,0000}{1,01 - 1,00} = 10,05 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Delta t = 0,01 \text{ s}$$

# Velocidade instantânea

- Qual a velocidade instantânea em  $t = 1$  s?

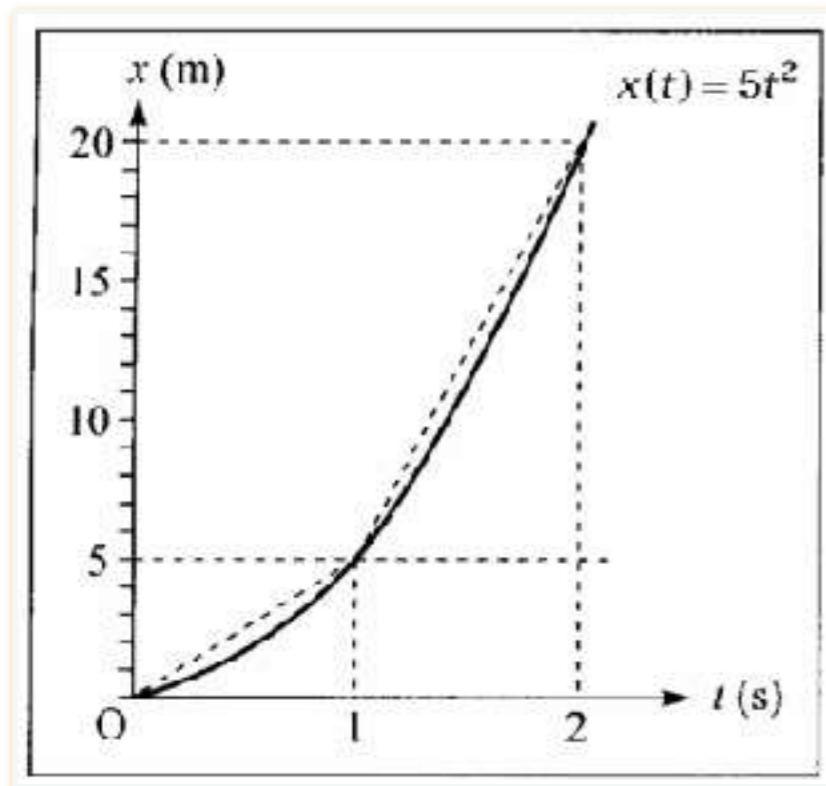


$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{0 \rightarrow 1} &= \frac{x(1) - x(0)}{1 - 0} = \frac{5 - 0}{1 - 0} = 5 \text{ m/s} \\ \bar{v}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{x(2) - x(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 5}{2 - 1} = 15 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Delta t = 1 \text{ s}$$
$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{0,9 \rightarrow 1} &= \frac{x(1) - x(0,9)}{1 - 0,9} = \frac{5,00 - 4,05}{1 - 0,9} = 9,5 \text{ m/s} \\ \bar{v}_{1 \rightarrow 1,1} &= \frac{x(1,1) - x(1)}{1,1 - 1} = \frac{6,05 - 5,00}{1,1 - 1} = 10,5 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Delta t = 0,1 \text{ s}$$
$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{0,99 \rightarrow 1} &= \frac{x(1) - x(0,99)}{1 - 0,99} = \frac{5,0000 - 4,9005}{1,00 - 0,99} = 9,95 \text{ m/s} \\ \bar{v}_{1 \rightarrow 1,01} &= \frac{x(1,01) - x(1)}{1,01 - 1,00} = \frac{5,1005 - 5,0000}{1,01 - 1,00} = 10,05 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Delta t = 0,01 \text{ s}$$

$$v = 10 \text{ m/s para } t = 1 \text{ s}$$

# Velocidade instantânea

- Qual a velocidade instantânea em  $t = 1$  s?



$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{0 \rightarrow 1} &= \frac{x(1) - x(0)}{1 - 0} = \frac{5 - 0}{1 - 0} = 5 \text{ m/s} \\ \bar{v}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{x(2) - x(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 5}{2 - 1} = 15 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Delta t = 1 \text{ s}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{0,9 \rightarrow 1} &= \frac{x(1) - x(0,9)}{1 - 0,9} = \frac{5,00 - 4,05}{1 - 0,9} = 9,5 \text{ m/s} \\ \bar{v}_{1 \rightarrow 1,1} &= \frac{x(1,1) - x(1)}{1,1 - 1} = \frac{6,05 - 5,00}{1,1 - 1} = 10,5 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Delta t = 0,1 \text{ s}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{0,99 \rightarrow 1} &= \frac{x(1) - x(0,99)}{1 - 0,99} = \frac{5,0000 - 4,9005}{1,00 - 0,99} = 9,95 \text{ m/s} \\ \bar{v}_{1 \rightarrow 1,01} &= \frac{x(1,01) - x(1)}{1,01 - 1,00} = \frac{5,1005 - 5,0000}{1,01 - 1,00} = 10,05 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \Delta t = 0,01 \text{ s}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)_{t=t_0} = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{t=t_0}$$

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_{t=1} = 10 \quad (\text{em m/s})$$



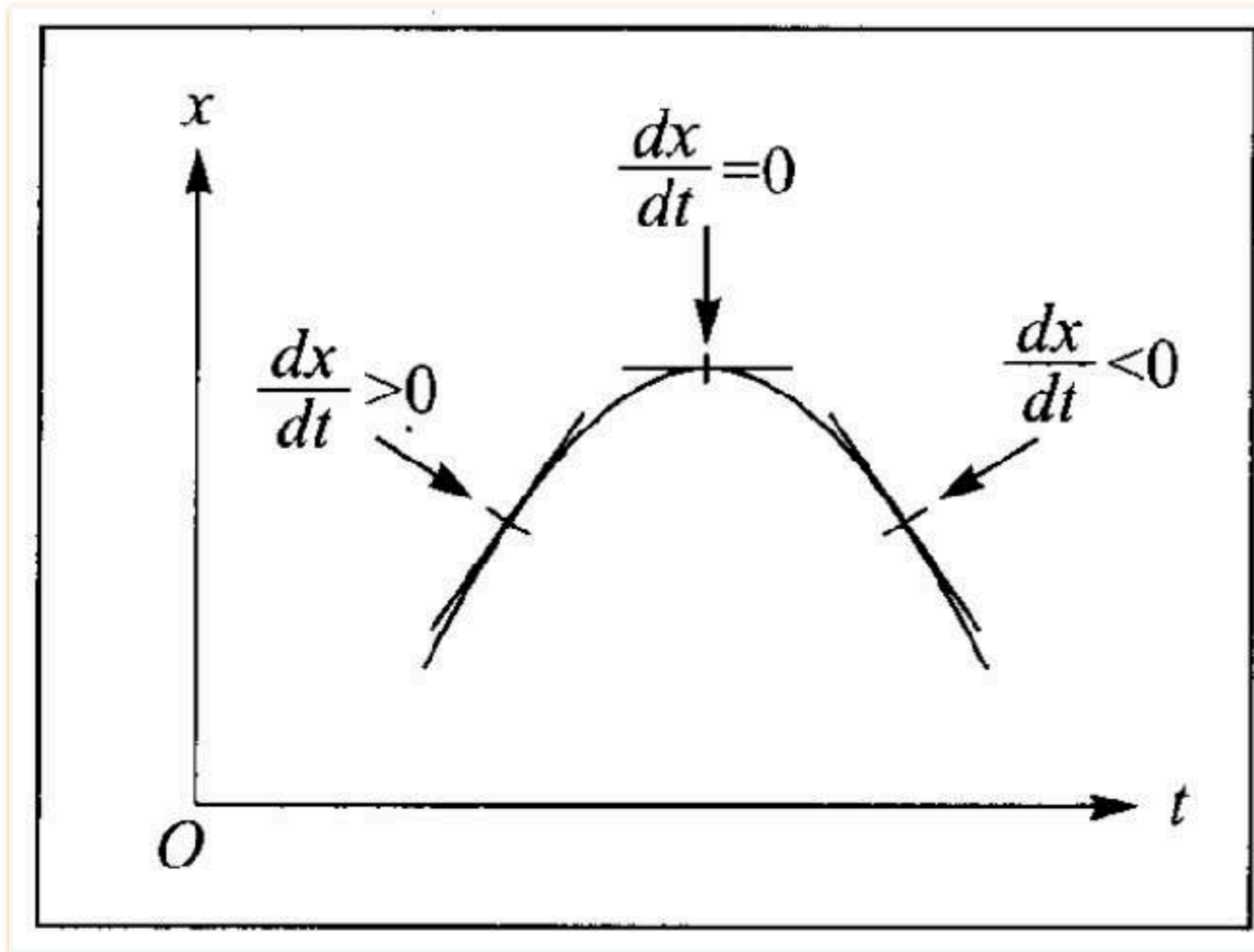
# Velocidade instantânea

- A velocidade instantânea  $v(t)$  num instante  $t$  qualquer é:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

derivada da posição em relação ao tempo

# Velocidade instantânea



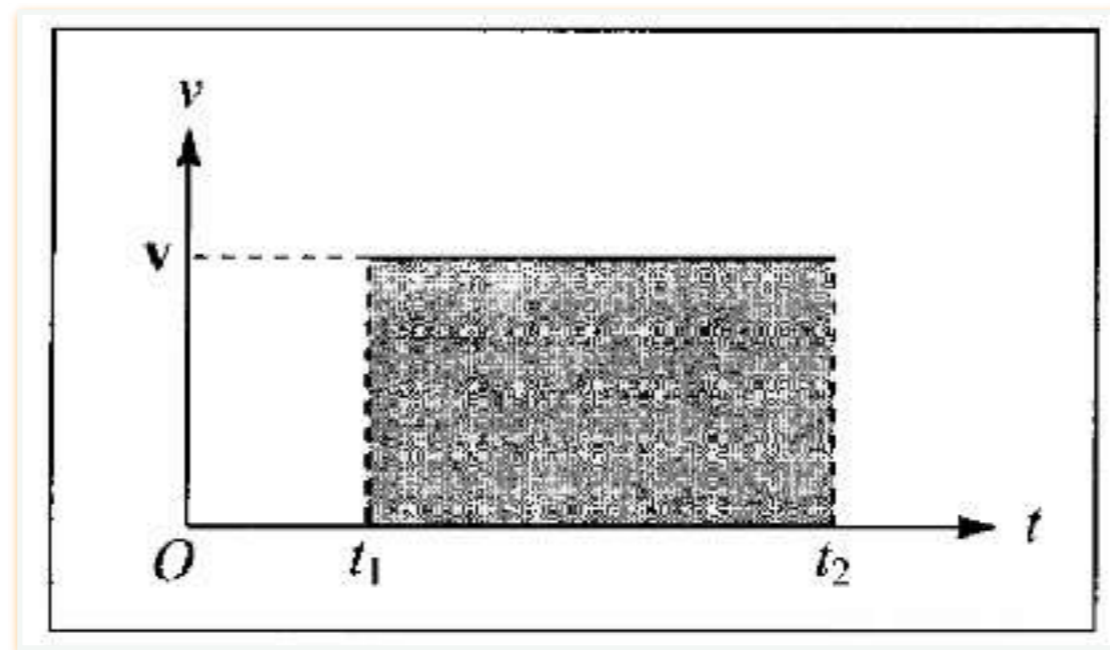
# O problema inverso

# O problema inverso

- A partir da lei horária, ou seja  $x = x(t)$ , podemos calcular a velocidade instantânea ao longo do movimento ( $v = dx/dt$ ).
- Muitas vezes, entretanto, nos deparamos com o problema inverso: sabendo-se a velocidade instantânea  $v(t)$  entre  $t_1$  e  $t_2$ , precisamos calcular o espaço percorrido neste intervalo de tempo, ou seja,  $x(t_2) - x(t_1)$ .

# O problema inverso

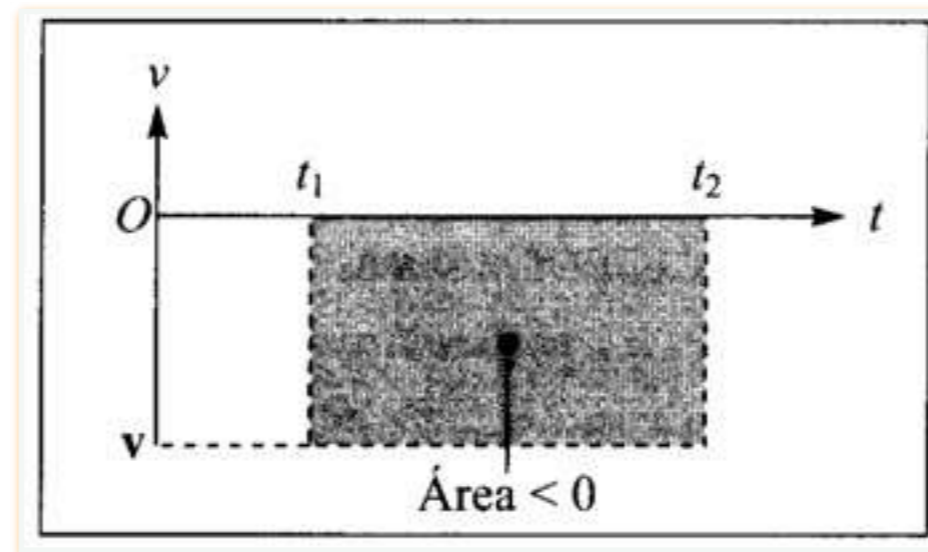
- Exemplo: movimento uniforme.



$$\Delta x_{t_1 \rightarrow t_2} = x(t_2) - x(t_1) = \bar{v}_{t_1 \rightarrow t_2} \Delta t = \bar{v}_{t_1 \rightarrow t_2} (t_2 - t_1) = \bar{v} (t_2 - t_1) = v (t_2 - t_1)$$

# O problema inverso

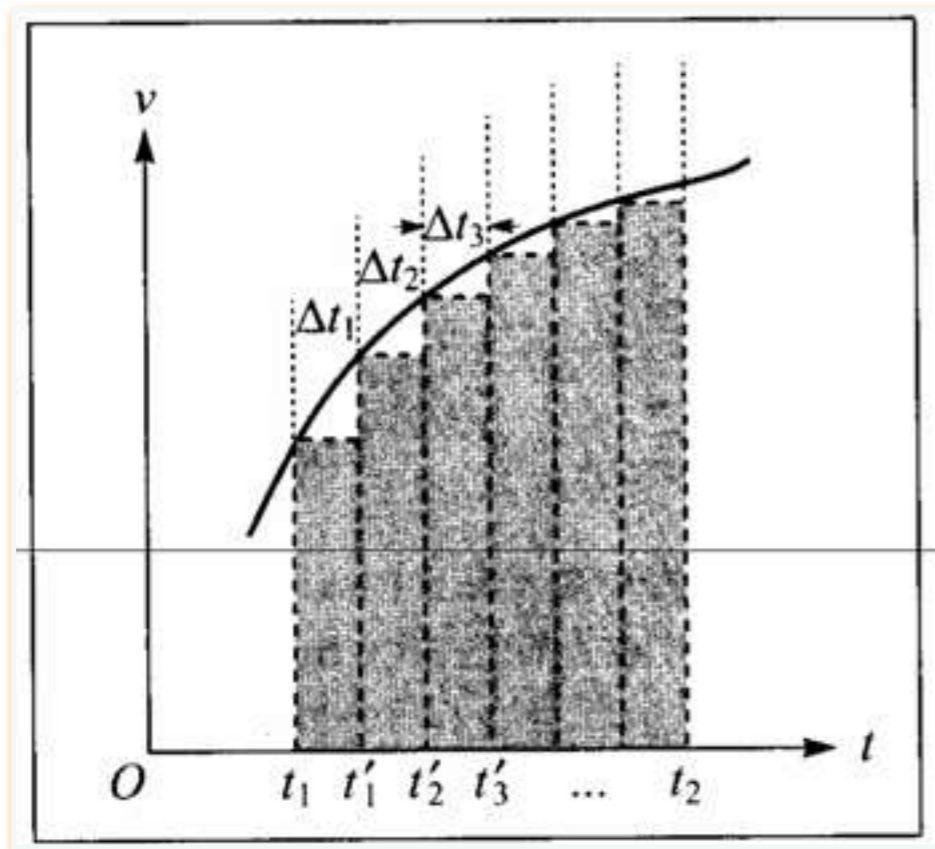
- Exemplo: movimento uniforme.



$$\Delta x_{t_1 \rightarrow t_2} = x(t_2) - x(t_1) = \bar{v}_{t_1 \rightarrow t_2} \Delta t = \bar{v}_{t_1 \rightarrow t_2} (t_2 - t_1) = \bar{v} (t_2 - t_1) = v (t_2 - t_1)$$

# O problema inverso

- E se o movimento for não-uniforme?



$$\Delta x_{t_1 \rightarrow t'_1} = x(t'_1) - x(t_1) = \bar{v}_{t_1 \rightarrow t'_1} \Delta t_1 \approx v(t_1) \Delta t_1$$

$$\Delta x_{t'_1 \rightarrow t'_2} = x(t'_2) - x(t'_1) = \bar{v}_{t'_1 \rightarrow t'_2} \Delta t_2 \approx v(t'_1) \Delta t_2$$

$$\Delta x_{t'_2 \rightarrow t'_3} = x(t'_3) - x(t'_2) = \bar{v}_{t'_2 \rightarrow t'_3} \Delta t_3 \approx v(t'_2) \Delta t_3$$

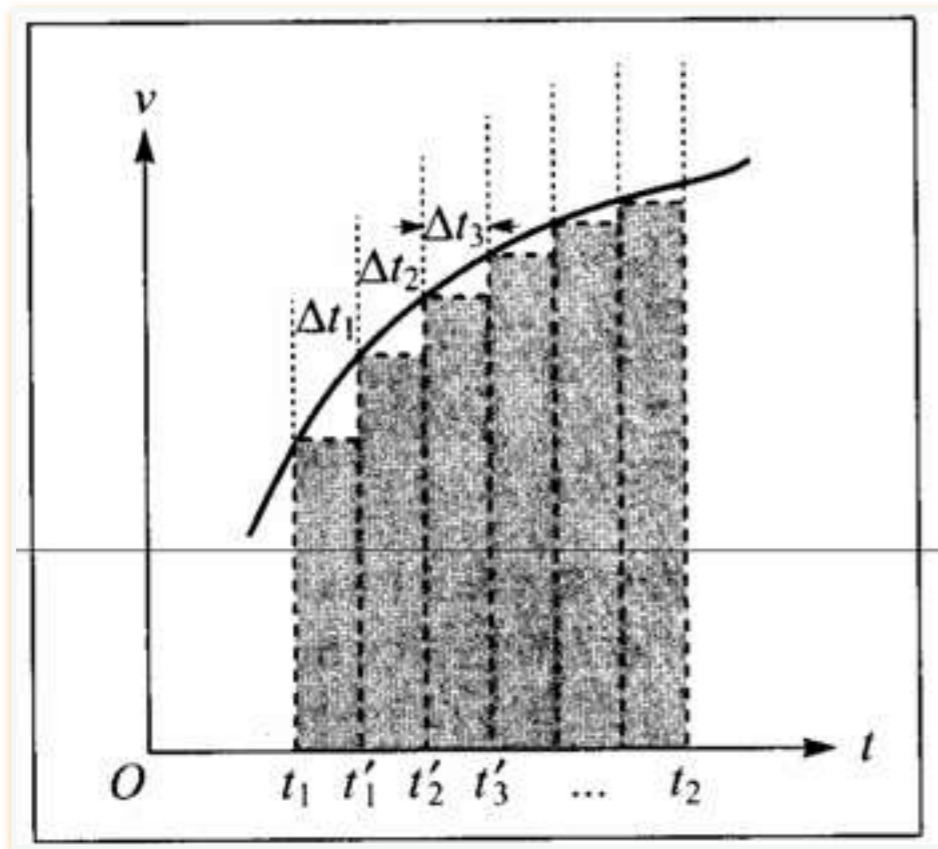
Somando membro a membro:

$$x(t'_3) - x(t_1) \approx v(t_1) \Delta t_1 + v(t'_1) \Delta t_2 + v(t'_2) \Delta t_3$$

$$x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_i v(t'_i) \Delta t'_i$$

# O problema inverso

- E se o movimento for não-uniforme?



$$x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_i v(t'_i) \Delta t'_i$$

Esta soma se aproxima tanto mais do resultado exato, quanto menores forem as subdivisões  $\Delta t'_i$

$$x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t'_i \rightarrow 0} \sum_i v(t'_i) \Delta t'_i$$

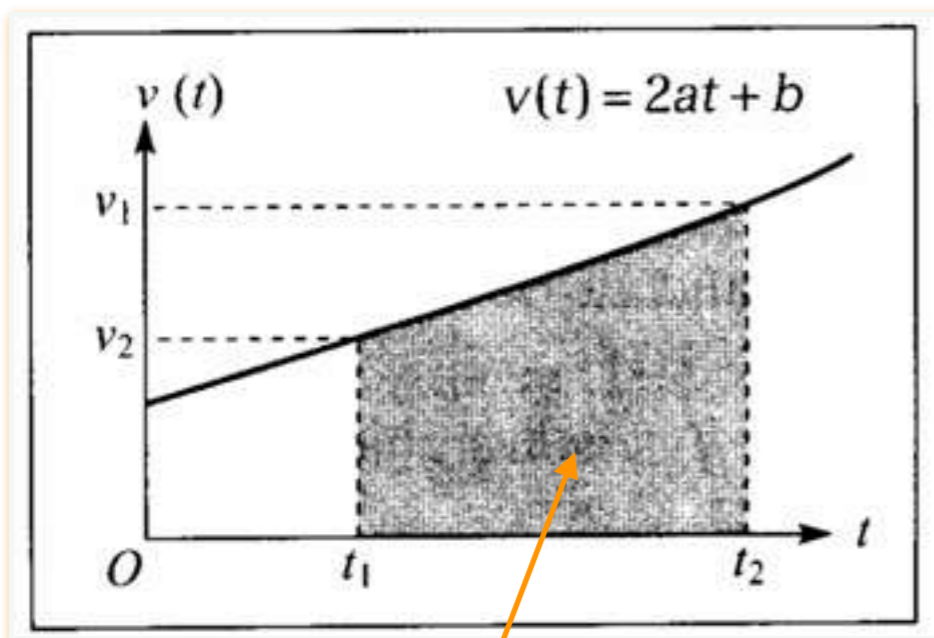
$$\lim_{\Delta t'_i \rightarrow 0} \sum_i v(t'_i) \Delta t'_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

integral definida de  $v(t)$  entre os extremos  $t_1$  e  $t_2$



# O problema inverso

- Exemplo:



$$\begin{cases} v(t_1) = v_1 = 2at_1 + b \\ v(t_2) = v_2 = 2at_2 + b \end{cases}$$

$$x(t_2) - x(t_1) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)$$

$$x(t_2) - x(t_1) = a(t_2^2 - t_1^2) + b(t_2 - t_1)$$

trapézio

# Aceleração

# Aceleração

- É a “velocidade de variação da velocidade”.

$$\bar{a}_{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

aceleração média

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

aceleração instantânea

# Aceleração

- Analogamente, podemos considerar o problema inverso, de determinar a variação de velocidade entre dois instantes a partir de  $a(t)$ :

$$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

# Resumo até aqui

$$\begin{array}{c} x(t) \\ \downarrow \text{derivação} \\ v(t) = \frac{dx}{dt} \\ \downarrow \text{derivação} \\ a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x(t) \\ \uparrow \text{integração} \\ v(t) = \frac{dx}{dt} \\ \uparrow \text{integração} \\ a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \end{array}$$

# **Movimiento retilíneo uniformemente acelerado**

# MRUA

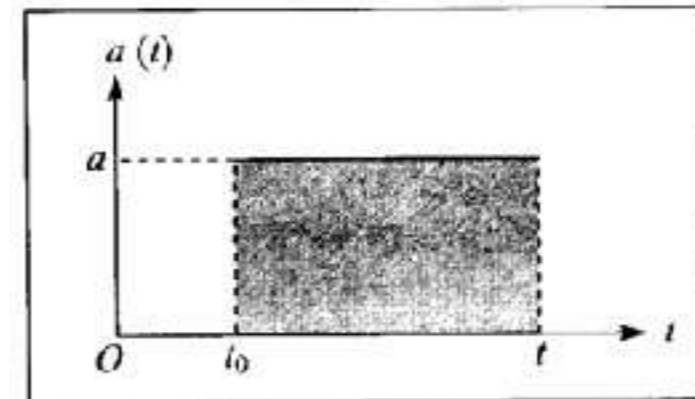
- A aceleração instantânea é constante (independe do tempo):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = a = \text{constante}$$

# MRUA

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = a = \text{constante}$$

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t a \, dt = a(t - t_0)$$



$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

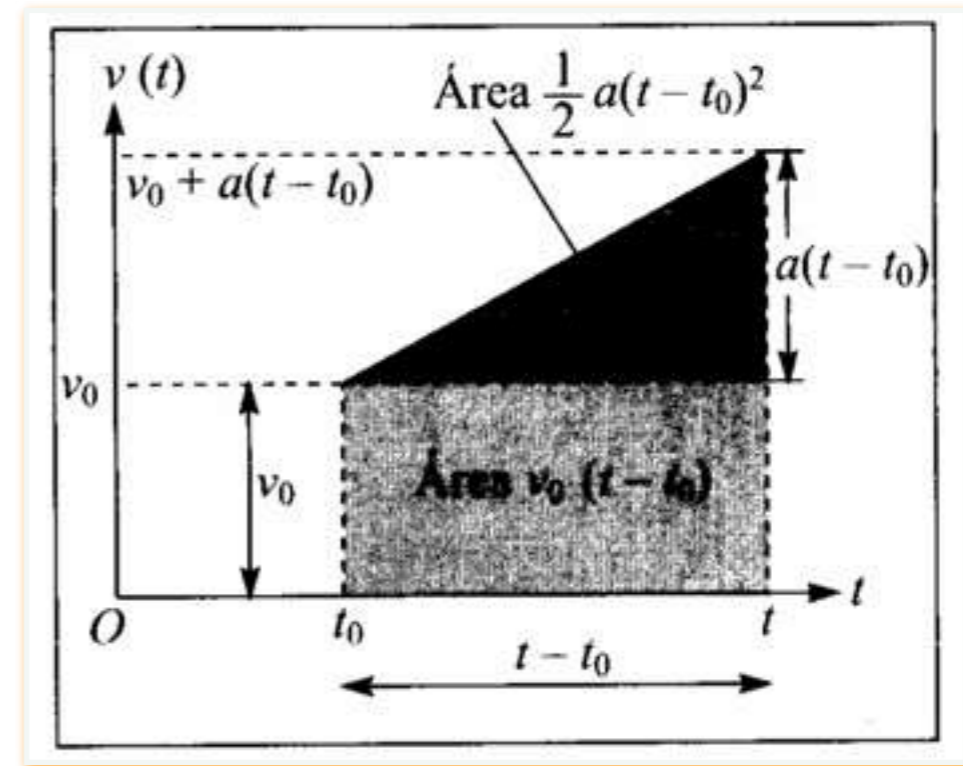


# MRUA

- E a posição  $x(t)$ ?

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

$$x(t) - x(t_0) = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$



$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$

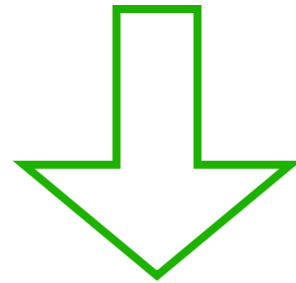
$$x(t_0) = x_0$$

# MRUA

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$



$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$



$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

# Sumário

- Velocidade média
- Velocidade instantânea
- O problema inverso
- Aceleração
- Movimento retilíneo uniformemente acelerado

